## Exercice 1

Une éolienne est un système qui permet de transformer l'énergie des vents en énergie électrique.

Son schéma est représenté sur la figure ci-dessous.

Elle constituée de trois solides :

0 : Bâti.

Repère lié : $R_0(A, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

1 : Bloc oscillant.

Repère lié : $R_1(A, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$.

Mouvement de 1 par rapport à 0 : rotation autour de $(A, \vec{z_0})$, de paramètre $\alpha = (\vec{x_0}, \vec{x_1}) = (\vec{y_0}, \vec{y_1})$.

2 : Hélice .

Repère lié : $R_2(G_2, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$.

Mouvement de 2 par rapport à 1 : rotation autour de $(G_2, \vec{x_1})$, de paramètre $\beta = (\vec{z_1}, \vec{z_2}) = (\vec{y_1}, \vec{y_2})$. $\overrightarrow{AG_2} = L\vec{x_1}$ ; $\overrightarrow{CA} = h\vec{x_1} + b\vec{z_1}$ et $\overrightarrow{G_2B} = r\vec{y_2}$. L, h, b et r sont des constantes.

Les figures planes de rotation sont fournies.

*On demande* :

1- Dresser le schéma de structure du mécanisme.

2- Exprimer $\vec{\Omega}_{(1/R0)}$ et $\vec{\Omega}_{(2/R0)}$.

3- Calculer $\vec{V}_{(C\in 1/R0)}$ par dérivation.

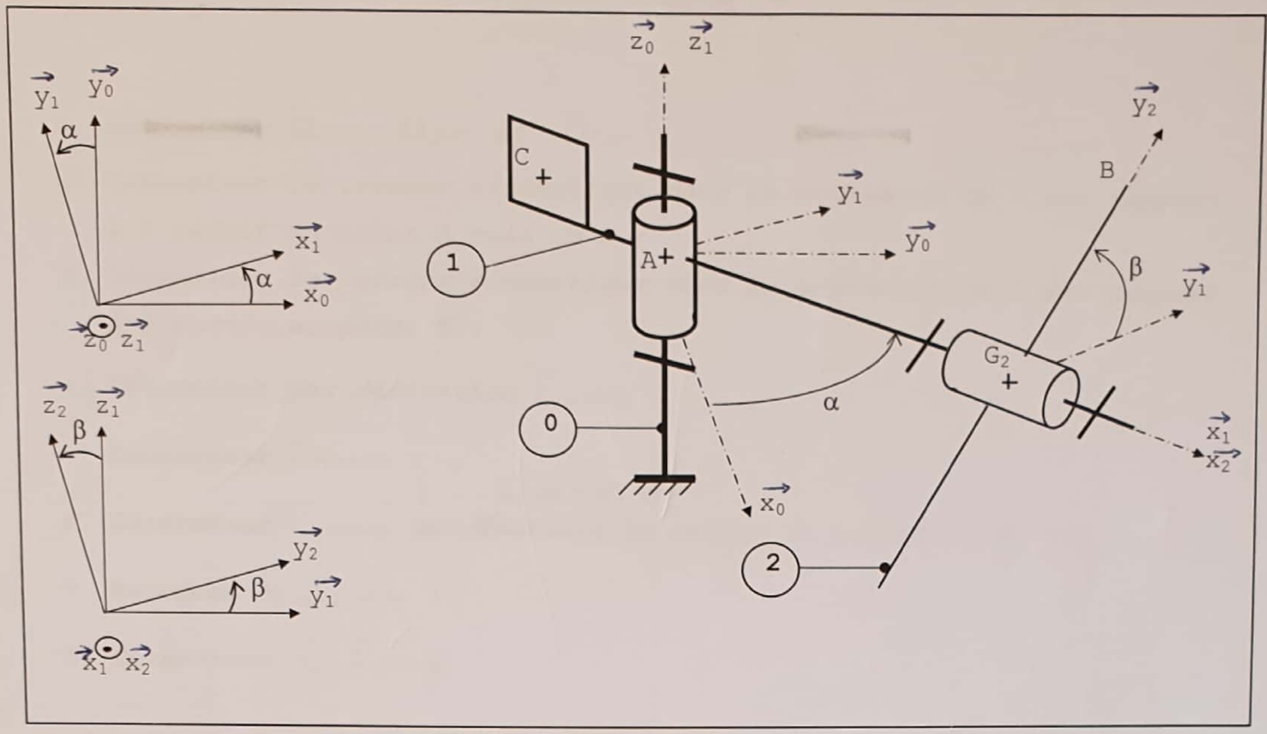
4- Déterminer $\vec{V}_{(G_2\in 1/R0)}$ par la relation de transport des vitesses.

5- Exprimer $\vec{V}_{(B\in 2/R0)}$ par composition.

6- Déterminer $\vec{\Gamma}_{(B\in 2/R0)}$.

7- Calculer : $\vec{x_0} \cdot \vec{\Gamma}_{(C\in 1/R0)}$.

8- Exprimer : $\vec{x_1} \cdot \vec{\Gamma}_{(G_2\in 2/R0)}$.




**Exercice 2**

Le schéma plan ci-dessous représente la cinématique simplifiée d'un robot.

On associe à chaque bras **i** un repère orthonormé direct de base $(\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i})$.

Les liaisons et les paramétrages des différents bras sont les suivants :

<u>0 - 1</u> : liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{z_0})$, de paramètre : $\alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$ ;

<u>0 - 2</u> : liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{z_0})$, de paramètre : $\beta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2})$ ;

<u>1 - 3</u> : liaison pivot d'axe $(B, \overrightarrow{z_0})$ telle que : $\overrightarrow{AB} = L\overrightarrow{x_1}$ ;

<u>2 - 4</u> : liaison pivot d'axe $(E, \overrightarrow{z_0})$ telle que : $\overrightarrow{EA} = L\overrightarrow{x_2}$ ;

<u>3 - 4</u> : liaison pivot d'axe $(C, \overrightarrow{z_0})$ telle que : $\overrightarrow{EC} = L\overrightarrow{x_4}$ ;

Par ailleurs : $\overrightarrow{CB} = L\overrightarrow{x_3}$ et $\overrightarrow{BJ} = 2L\overrightarrow{x_3}$ .

Les mouvements du robot sont commandés par deux moteurs $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$.

Le solide **1** a son mouvement commandé par $\mathbf{M_1}$ ;

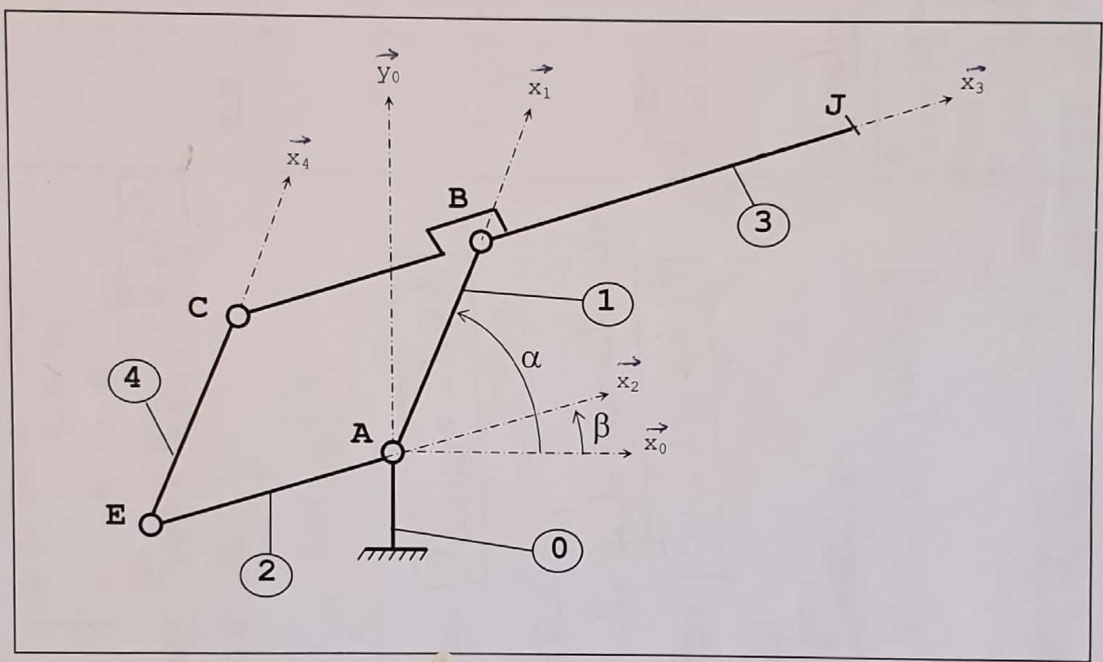
Le solide **2** a son mouvement commandé par $\mathbf{M_2}$ ;

α et β sont des fonctions du temps.

Remarquer que (ABCE) est un parallélogramme, donc (CB) et (EA) sont parallèles (Idem pour (EC) et (AB)).

## Travail demandé :

1. Déterminer $\overrightarrow{\Omega}_{(1/0)}$ , $\overrightarrow{\Omega}_{(3/0)}$ et $\overrightarrow{\Omega}_{(3/1)}$ ;
2. Déterminer le torseur cinématique dans le mouvement de 1 par rapport à 0 réduit au point A puis en B ;
3. Déterminer le torseur cinématique dans le mouvement de 3 par rapport à 0 réduit au point B ;
4. Déterminer par dérivation $\overrightarrow{V}_{(J\in 3/0)}$ ;
5. Déterminer $\overrightarrow{V}_{(C\in 4/0)}$ ;
6. Déterminer $\overrightarrow{V}_{(E\in 4/1)}$ puis $\vec{v}(C\in 4/1)$ et en déduire la nature du mouvement de 4/1 ;
7. Exprimer $\overrightarrow{x_1}\,.\,\overrightarrow{\Gamma}_{(B\in 1/0)}$ ;
8. Déterminer $\overrightarrow{y_0}\,.\,\overrightarrow{\Gamma}_{(J\in 3/0)}$ .



# CINEMATIQUE - TD1 - CORRIGE

## Exercice 1

1°)

$$0 \xrightarrow[(A,\vec{z}_0)]{\text{pivot}} 1 \xrightarrow[(G_2,\vec{x}_1)]{\text{pivot}} 2$$

Liste des pts :

$\begin{cases} \text{pts de } 0 : A \\ \text{pts de } 1 : A, C, G_2 \\ \text{pts de } 2 : G_2, B \end{cases}$

2°) $\boxed{\vec{\Omega}(1/R_0) = \dot{\alpha}\,\vec{z}_0}$ ; $\vec{\Omega}(2/0) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) = \boxed{\dot{\alpha}\,\vec{z}_0 + \dot{\beta}\,\vec{x}_1}$

3°) $\vec{V}(C\in 1/0) = \frac{d}{dt}\vec{AC}\Big]_0 = \frac{d}{dt}\left[-h\vec{x}_1 - b\vec{z}_1\right]_0$

$= -h \frac{d\vec{x}_1}{dt}\Big]_0 - b \underbrace{\cancel{\frac{d\vec{z}_1}{dt}\Big]_0}}_{\vec{0}} = -h\,\vec{\Omega}(1/0)\wedge\vec{x}_1$

$= -h\,\dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1$ Donc : $\boxed{\vec{V}(C\in 1/0) = -h\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1}$

4°) $\vec{V}(G_2\in 1/0) = \underbrace{\cancel{\vec{V}(A\in 1/0)}}_{\vec{0}} + \vec{G_2A}\wedge\vec{\Omega}(1/0)$

$\vec{0}$ (A est le centre de la pivot entre 1 et 0)

$= -L\vec{x}_1 \wedge \dot{\alpha}\,\vec{z}_0$ Donc : $\boxed{\vec{V}(G_2\in 1/0) = L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1}$

5°) $\vec{V}(B\in 2/0) = \vec{V}(B\in 2/1) + \vec{V}(B\in 1/0)$

- $\vec{V}(B\in 2/1) = \underbrace{\cancel{\vec{V}(G_2\in 2/1)}}_{\vec{0}} + \vec{BG_2}\wedge\vec{\Omega}(2/1)$

$\vec{0}$ ($G_2$ est le centre de la pivot 2-1)

$= -r\vec{y}_2 \wedge \dot{\beta}\,\vec{x}_1 = r\dot{\beta}\,\vec{z}_2$

- $\vec{V}(B\in 1/0) = \underbrace{\cancel{\vec{V}(A\in 1/0)}}_{\vec{0}} + \vec{BA}\wedge\vec{\Omega}(1/0)$

$= \left(-r\vec{y}_2 - L\vec{x}_1\right)\wedge\dot{\alpha}\,\vec{z}_0 = -r\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{x}_1 + L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1$

D'où : $\boxed{\vec{V}(B\in 2/0) = L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 - r\left(\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{x}_1 - \dot{\beta}\,\vec{z}_2\right)}$

6°) $\vec{\Gamma}(B\in 2/0) = \frac{d}{dt}\vec{V}(B\in 2/0)\Big]_0$

$= \frac{d}{dt}\left[L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 - r\left(\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{x}_1 - \dot{\beta}\,\vec{z}_2\right)\right]_0$

$= L\left(\ddot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\frac{d\vec{y}_1}{dt}\Big]_0\right) - r\left(\ddot{\alpha}\cos\beta\,\vec{x}_1 - \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\,\vec{x}_1 + \dot{\alpha}\cos\beta\frac{d\vec{x}_1}{dt}\Big]_0 - \ddot{\beta}\,\vec{z}_2 - \dot{\beta}\frac{d\vec{z}_2}{dt}\Big]_0\right)$

on a :

- $\frac{d\vec{y}_1}{dt}\Big]_0 = \vec{\Omega}(1/0)\wedge\vec{y}_1 = \dot{\alpha}\,\vec{z}_0\wedge\vec{y}_1 = -\dot{\alpha}\,\vec{x}_1$
- $\frac{d\vec{x}_1}{dt}\Big]_0 = \dot{\alpha}\,\vec{y}_1$
- $\frac{d\vec{z}_2}{dt}\Big]_0 = \vec{\Omega}(2/0)\wedge\vec{z}_2 = \left(\dot{\alpha}\,\vec{z}_0 + \dot{\beta}\,\vec{x}_1\right)\wedge\vec{z}_2$

$= \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_1 - \dot{\beta}\,\vec{y}_2$

Donc :

$\vec{\Gamma}(B\in 2/0) = L\left(\ddot{\alpha}\,\vec{y}_1 - \dot{\alpha}^2\vec{x}_1\right) - r\left(\ddot{\alpha}\cos\beta\,\vec{x}_1 - \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\,\vec{x}_1 + \dot{\alpha}^2\cos\beta\,\vec{y}_1 - \ddot{\beta}\,\vec{z}_2 - \dot{\beta}\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_1 + \dot{\beta}^2\,\vec{y}_2\right)$

Soit alors :

$-r\ddot{\alpha}\cos\beta$

$\boxed{\vec{\Gamma}(B\in 2/0) = \left(-L\dot{\alpha}^2 + 2r\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\right)\vec{x}_1 + \left(L\ddot{\alpha} - r\dot{\alpha}^2\cos\beta\right)\vec{y}_1 + r\ddot{\beta}\,\vec{z}_2 - r\dot{\beta}^2\,\vec{y}_2}$

7°) $\vec{x}_0\cdot\vec{\Gamma}(C\in 1/0) = \vec{x}_0\cdot\frac{d}{dt}\vec{V}(C\in 1/0)\Big]_0$

$= \frac{d}{dt}\left(\vec{x}_0\cdot\vec{V}(C\in 1/0)\right) - \vec{V}(C\in 1/0)\cdot\underbrace{\cancel{\frac{d\vec{x}_0}{dt}\Big]_0}}_{\vec{0}}$

$\vec{x}_0 \cdot \vec{\Gamma}_{(C\in 1/0)} = \frac{d}{dt}\left[\vec{x}_0 \cdot (-h\dot{\alpha}\,\vec{y}_1)\right] = \frac{d}{dt}\left[+h\dot{\alpha}\sin\alpha\right]$

donc: $\boxed{\vec{x}_0 \cdot \vec{\Gamma}_{(C\in 1/0)} = h(\dot{\alpha}^2\cos\alpha + \ddot{\alpha}\sin\alpha)}$

8°) $\vec{x}_1 \cdot \vec{\Gamma}_{(G_2\in 2/0)} = \vec{x}_1 \cdot \frac{d}{dt}\vec{V}_{(G_2\in 2/0)}\Big]_0$

$= \frac{d}{dt}\left[\vec{x}_1 \cdot \vec{V}_{(G_2\in 2/0)}\right] - \vec{V}_{(G_2\in 2/0)} \cdot \frac{d\vec{x}_1}{dt}\Big]_0$

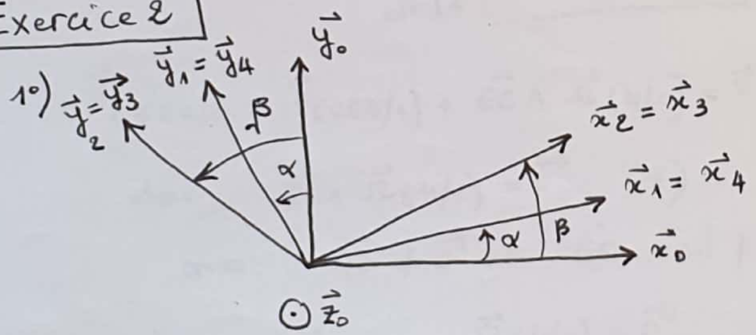
$= \frac{d}{dt}\left[\vec{x}_1 \cdot \left(\underbrace{\cancel{\vec{V}_{(G_2\in 2/1)}}}_{\vec{0}} + \vec{V}_{(G_2\in 1/0)}\right)\right] - \vec{V}_{(G_2\in 2/0)} \cdot (\dot{\alpha}\,\vec{y}_1)$

$= \frac{d}{dt}\left[\underbrace{\vec{x}_1 \cdot (L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1)}_{0}\right] - L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 \cdot (\dot{\alpha}\,\vec{y}_1)$ .

donc: $\boxed{\vec{x}_1 \cdot \vec{\Gamma}_{(G_2\in 2/0)} = -L\dot{\alpha}^2}$

Exercice 2

1°)




Liste des points
de 0 : A
de 1 : A, B
de 2 : A, E
de 3 : C, B, J
de 4 : E, C

$\boxed{\vec{\Omega}_{(1/0)} = \dot{\alpha}\,\vec{z}_0}$ ; $\boxed{\vec{\Omega}_{(3/0)} = \dot{\beta}\,\vec{z}_0}$ ; $\vec{\Omega}_{(3/1)} = \vec{\Omega}_{(3/0)} - \vec{\Omega}_{(1/0)} = (\dot{\beta} - \dot{\alpha})\,\vec{z}_0$

2°) * $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(A\in 1/0)\end{matrix}\right\}_A$

$\vec{V}_{(A\in 1/0)} = \vec{0}$ (A est le centre de la pivot 0-1)

donc: $\boxed{\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{\begin{matrix}\dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_A}$

* $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{\begin{matrix}\dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \\ \vec{V}(B\in 1/0)\end{matrix}\right\}_B$

$\vec{V}_{(B\in 1/0)} = \frac{d}{dt}\vec{AB}\Big]_0 = \frac{d}{dt} L\,\vec{x}_1\Big]_0 = L\,\vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{x}_1$

$= L\dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1 = L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1$

Donc: $\boxed{\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{\begin{matrix}\dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \\ L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1\end{matrix}\right\}_B}$

3°) $\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(3/0) \\ \vec{V}(B\in 3/0)\end{matrix}\right\}_B$

$\vec{\Omega}(3/0) = \dot{\beta}\,\vec{z}_0$

$\vec{V}_{(B\in 3/0)} = \underbrace{\cancel{\vec{V}(B\in 3/1)}}_{\vec{0}} + \vec{V}(B\in 1/0)$

$\vec{0}$ (B est le centre de la pivot 3-1)

donc: $\boxed{\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{\begin{matrix}\dot{\beta}\,\vec{z}_0 \\ L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1\end{matrix}\right\}}$

4°) $\vec{V}_{(J\in 3/0)} = \frac{d}{dt}\vec{AJ}\Big]_0 = \frac{d}{dt}\left[\vec{AB} + \vec{BJ}\right]_0$

$= \frac{d}{dt}\left[L\vec{x}_1\right]_0 + \frac{d}{dt}\left[2L\,\vec{x}_3\right]_0 = L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + 2L\,\vec{\Omega}(3/0) \wedge \vec{x}_3$

$= L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + 2L\,\dot{\beta}\,\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_3$

Donc : $\boxed{\vec{V}(J\in 3/0) = L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + 2L\dot{\beta}\,\vec{y}_3}$

5) $\vec{V}(C\in 4/0) = \frac{d}{dt}\vec{AC}\Big]_0 = \frac{d}{dt}\left[-L\vec{x}_2 + L\vec{x}_4\right]_0 \qquad (\vec{x}_4 = \vec{x}_1)$

$= -L\frac{d\vec{x}_2}{dt}\Big]_0 + L\frac{d\vec{x}_1}{dt}\Big]_0 = \boxed{-L\dot{\beta}\,\vec{y}_2 + L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1}$

6°) • $\vec{V}(E\in 4/1) = \frac{d}{dt}\vec{AE}\Big]_1 = \frac{d}{dt}-L\vec{x}_2\Big]_1 = -L\,\vec{\Omega}(2/1)\wedge\vec{x}_2$

$= -L\left[\vec{\Omega}(2/0) - \vec{\Omega}(1/0)\right]\wedge\vec{x}_2$

$= -L\left[\dot{\beta}\,\vec{z}_0 - \dot{\alpha}\,\vec{z}_0\right]\wedge\vec{x}_2 = -L(\dot{\beta}-\dot{\alpha})\,\vec{z}_0\wedge\vec{x}_2$

$\boxed{\vec{V}(E\in 4/1) = L(\dot{\alpha} - \dot{\beta})\,\vec{y}_2}$

• $\vec{V}(C\in 4/1) = \frac{d}{dt}\vec{BC}\Big]_1 = -L\frac{d}{dt}\left[\vec{x}_3\right]_1 \qquad (\vec{x}_3 = \vec{x}_2)$

$= -L\frac{d\vec{x}_2}{dt}\Big]_1 = \boxed{L(\dot{\alpha} - \dot{\beta})\,\vec{y}_2}$

• $\vec{V}(E\in 4/1) = \vec{V}(C\in 4/1) + \vec{EC}\wedge\vec{\Omega}(4/1) = \vec{V}(C\in 4/1)$

donc : $\vec{EC}\wedge\vec{\Omega}(4/1) = \vec{0} \qquad (*)$

on a : $\vec{EC} \neq \vec{0}$ et $\vec{EC}$ n'est pas // à $\vec{\Omega}(4/1)$

donc $(*) \Rightarrow \vec{\Omega}(4/1) = \vec{0}$

Le mvt de 4/1 est une translation circulaire.

7°) $\vec{x}_1\cdot\vec{\Gamma}(B\in 1/0) = \vec{x}_1\cdot\frac{d}{dt}\vec{V}(B\in 1/0)\Big]_0 = \frac{d}{dt}\left[\vec{x}_1\cdot\vec{V}(B\in 1/0)\right] - \vec{V}(B\in 1/0)\cdot\frac{d\vec{x}_1}{dt}\Big]_0$

On a, $\vec{x}_1\cdot\vec{V}(B\in 1/0) = \vec{x}_1\cdot L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 = 0$

et $\frac{d\vec{x}_1}{dt}\Big]_0 = \dot{\alpha}\,\vec{y}_1$.

donc : $\boxed{\vec{x}_1\cdot\vec{\Gamma}(B\in 1/0) = -L\dot{\alpha}^2}$

8°) $\vec{y}_0\cdot\vec{\Gamma}(J\in 3/0) = \vec{y}_0\cdot\frac{d}{dt}\vec{V}(J\in 3/0)\Big]_0$

$= \frac{d}{dt}\left[\vec{y}_0\cdot\vec{V}(J\in 3/0)\right] - \vec{V}(J\in 3/0)\cdot\cancel{\frac{d\vec{y}_0}{dt}\Big]_0} \xrightarrow{} \vec{0}$

$= \frac{d}{dt}\left[\vec{y}_0\cdot\left(L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + 2L\dot{\beta}\,\vec{y}_3\right)\right]$

$= \frac{d}{dt}\left(L\dot{\alpha}\cos\alpha + 2L\dot{\beta}\cos(\beta-\alpha)\right)$

D'où :

$$\boxed{\vec{y}_0\cdot\vec{\Gamma}(J\in 3/0) = L\left[\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha + 2\left(\ddot{\beta}\cos(\beta-\alpha) - \dot{\beta}(\dot{\beta}-\dot{\alpha})\sin(\beta-\alpha)\right)\right]}$$

fin

CPGE- Marrakech

**Travaux dirigés de Sciences industrielles**

Classes : ..............

Prof. :Ouikassi

**Chapitre** : ......................................................................

**TD** : .........

## Exercice 1

En vous référant au schéma cinématique de la figure 1 du document annexe1, reproduire sur la copie, puis compléter le tableau suivant :

| Solides | Nature de la liaison | Nbre de ddl | Spécification des ddl | Symbole plan | Toseur cinématique |
|---|---|---|---|---|---|
| 1-0 | | | | | |
| 1-2 | | | | | |
| 3-2 | | | | | |
| 3-4 | | | | | |

## Exercice 2

Les manipulateurs MANUMAX exécutent des mouvements combinés et répétitifs selon un cycle déterminé. Ils sont adaptables à plusieurs taches : chargement et déchargement d'une machine, assemblage de pièces…
La figure 2 du document annexe 1 donne la schématisation adoptée pour l'étude de l'ensemble automatique de manipulation.
Le mécanisme est constitué de 4 solides : 0, 1, 2 et 3.

0 : Socle (Bâti) : Repère lié $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$.

1 : Corps : Repère lié $R_1(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0})$.

Le mouvement de 1/0 est une rotation d'axe (O, $\overrightarrow{z_0}$ ) et de paramètre $\alpha$.

$\overrightarrow{OG_1} = a\overrightarrow{z_0}$.

2 : Bras : Repère lié $R_2(O_2,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0})$.

Le mouvement de 2/1 est une translation d'axe (O, $\overrightarrow{z_0}$ ) et de paramètre z tel que : $\overrightarrow{OO_2} = z\overrightarrow{z_0} + l_2\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{O_2G_2} = -a\overrightarrow{x_1}$.

3 : Main avec la pièce qu'elle tient : Repère lié $R_3(G_3,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3})$.

Le mouvement de 3/2 est une translation et rotation d'axe ($O_2$, $\overrightarrow{x_1}$ ) de paramètres $\beta$ et x / $\overrightarrow{O_2G_3} = x\overrightarrow{x_1}$.

On demande :

1. Déterminer $\overrightarrow{\Omega}_{(3/2)}$ et $\overrightarrow{\Omega}_{(3/R0)}$.
2. Justifier le choix du repère lié à 2.
3. Déterminer $\overrightarrow{V}_{(G_1/R0)}$ et $\overrightarrow{\Gamma}_{(G_1/R0)}$ par dérivation.
4. Déterminer $\overrightarrow{V}_{(G_2/R0)}$ par la relation de champ.
5. Calculer $\overrightarrow{\Gamma}_{(G_2/R0)}$ par composition.
6. Déterminer $\overrightarrow{V}_{(G_3/R0)}$ par composition. (Faire apparaître le mouvement de 3/2, de 2/1 et de 1/0).
7. Spécifier les trajectoires du point $G_3$ dans le mouvement relatif et dans les deux mouvements d'entraînement.

8. Déterminer $\overrightarrow{y_1} \cdot \overrightarrow{\Gamma}_{(G_3/R0)}$ sans déterminer complètement $\overrightarrow{\Gamma}_{(G_3/R0)}$.
9. Donner les torseurs cinématiques de 1/0, de 2/1 et de 3/2 réduits aux points $G_1$, $G_2$ et $G_3$ respectivement.

## Exercice 3

On considère le mécanisme représenté sur la figure 3 du document annexe 1. Il se compose de quatre solides : 0, 1, 2 et 3.

0 : Bâti fixe, auquel est associé le repère $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$.

1 : Bras pivotant, auquel est lié le repère $R_1(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0})$.

Le mouvement de 1 par rapport à 0 est une rotation d'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$, de paramètre $\alpha$. $\overrightarrow{OB} = l_1\overrightarrow{x_1}$.

2 : Galet cylindrique de rayon $\frac{D_2}{2}$, auquel est lié le repère $R_2(B,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_0})$.

Le mouvement de 2 par rapport à 1 est une rotation d'axe $(B, \overrightarrow{z_0})$ paramétrée par $\beta$. J est le point de contact entre 2 et 3.

3 : Plate-forme. Repère associé : $R_3(G,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$.

Le mouvement de 3 par rapport à 0 est une translation de direction $\overrightarrow{y_0}$, et de paramètre y, tel que : $\overrightarrow{OG} = y\overrightarrow{y_0}$.

On demande :

1. Expliquer, brièvement, le fonctionnement de ce mécanisme.
2. Identifier toutes les liaisons entre les solides de ce mécanisme.
3. Déterminer $\overrightarrow{\Omega}_{(1/0)}$ et $\overrightarrow{\Omega}_{(2/0)}$.
4. Déterminer $\overrightarrow{V}_{(J\in 2/0)}$ puis $\overrightarrow{V}_{(J\in 3/0)}$ par la relation de champ.
   Déduire $\overrightarrow{V}_{(J\in 3/2)}$ : vitesse de glissement en J, entre les solides 2 et 3.
5. Ce vecteur vitesse de glissement doit être contenu dans le plan tangent commun à 2 et 3 contenant le point J.
   Déduire alors une relation entre $\dot{y}$ et $\dot{\alpha}$.
6. Sachant qu'il y'à roulement sans glissement en J entre les solides en contact, c'est-à-dire $\overrightarrow{V}_{(J\in 3/2)} = \overrightarrow{0}$, déduire une relation entre $\dot{\beta}$ et $\dot{\alpha}$. Conclure.

## Exercice 4

Une meule de moulin à vent permet de moudre les grains de blé.

Pour cela, une meule cylindrique roule sans glisser sur un plan horizontal et tourne autour d'un axe vertical.

Le mécanisme est constitué de :

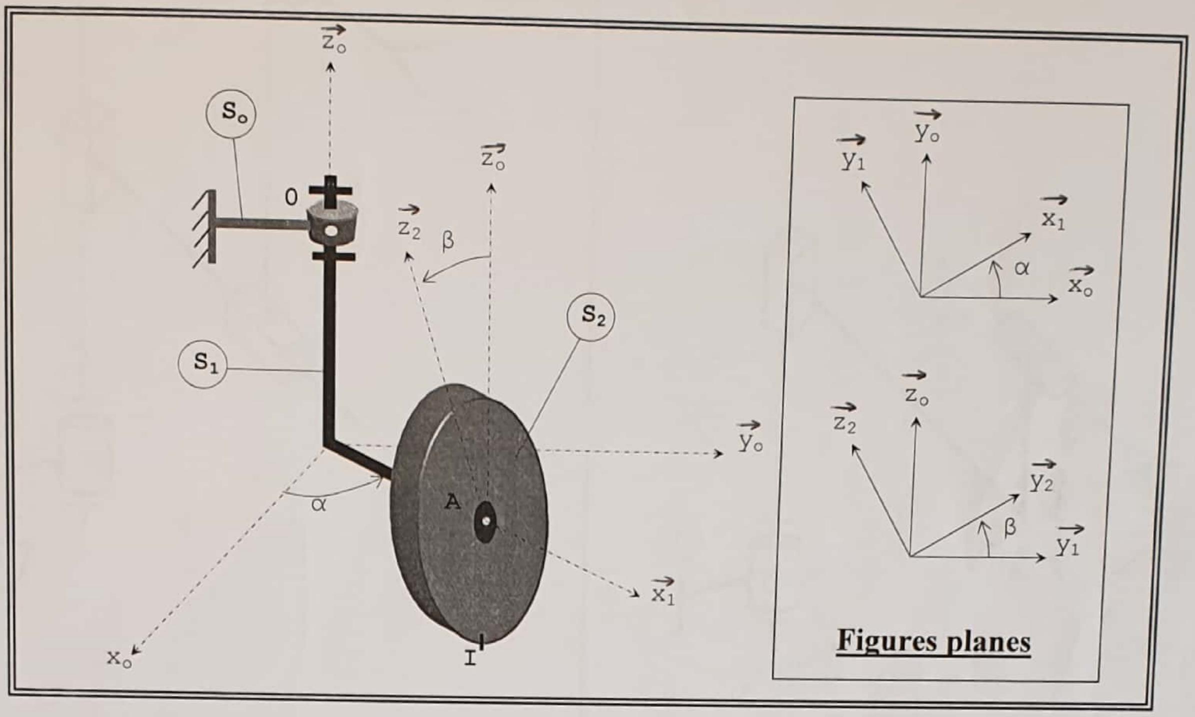
- Bâti fixe (**S₀**) : repère lié $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Le plan $(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ est horizontal.
- Bras (S1) : repère lié $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$.

En rotation par rapport à ($\underline{S_o}$) autour de l'axe $(O,\vec{z}_0)$, de paramètre α.

$$\overrightarrow{OA} = h_1\vec{z}_0 + L_1\vec{x}_1 \quad (\ h_1 \text{ et } L_1 : \text{constantes}).$$

- Meule (S2) : repère lié $R_2(A,\vec{x}_1,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$. De forme cylindrique de rayon **a**, en rotation par rapport à ($\underline{S_1}$) autour de l'axe $(A,\vec{x}_1)$, de paramètre β.

  **I** : point de la ligne de contact entre la meule et le plan horizontal de ($\underline{S_o}$) : $\overrightarrow{AI} = -a\,\vec{z}_0$.




*1- Determiner $\vec{\Omega}_{(S1/S0)}$ et $\vec{\Omega}_{(S2/S0)}$.*

*2- Déterminer $\vec{V}_{(A\in S1/S0)}$ par dérivation, et déduire $\vec{V}_{(A\in S2/S0)}$.*

*3- Exprimer le roulement sans glissement entre $S_2$ et $S_0$, puis déduire une relation entre $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$.*

*5- Soit B point de $S_2$ tel que $\overrightarrow{AB} = a\,\vec{z}_2$. Déterminer $\vec{z}_0 \cdot \vec{\Gamma}_{(B\in S2/S0)}$ en effectuant le minimum de calcul possible.*

Document annexe 1

Figure 1

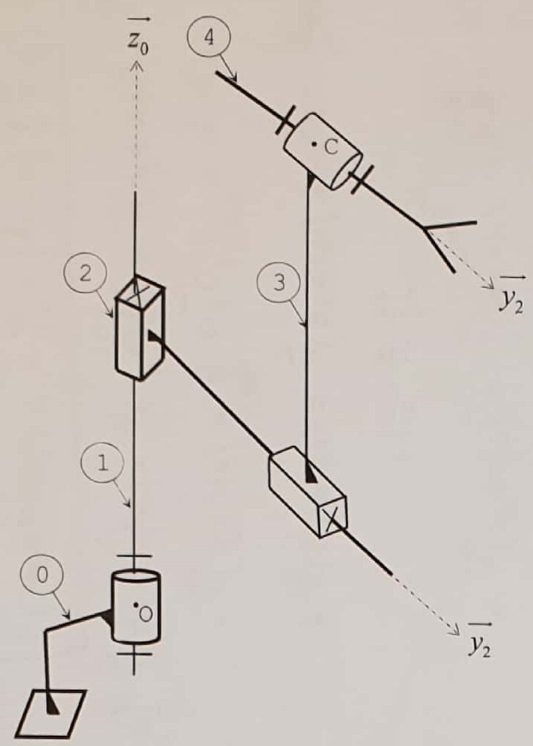



Figure 2

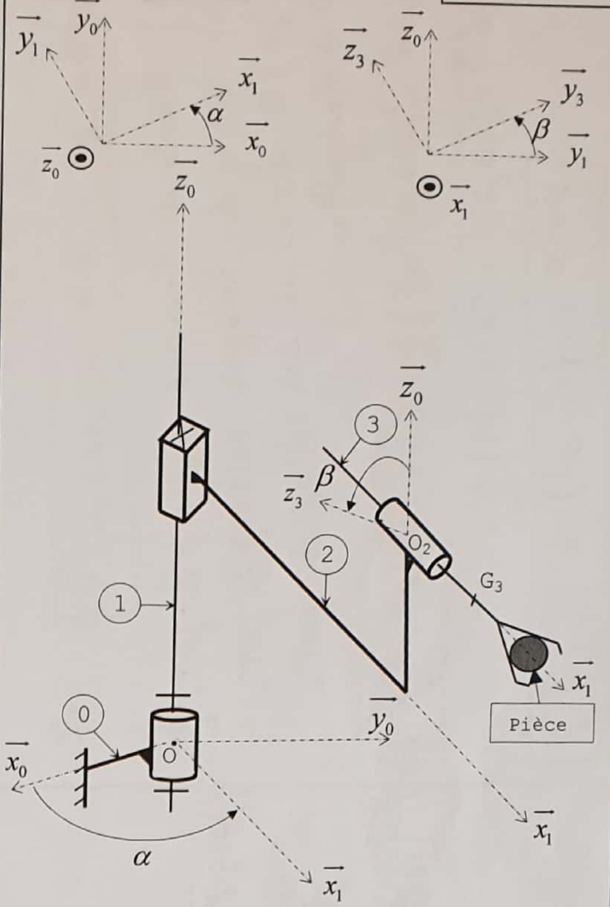
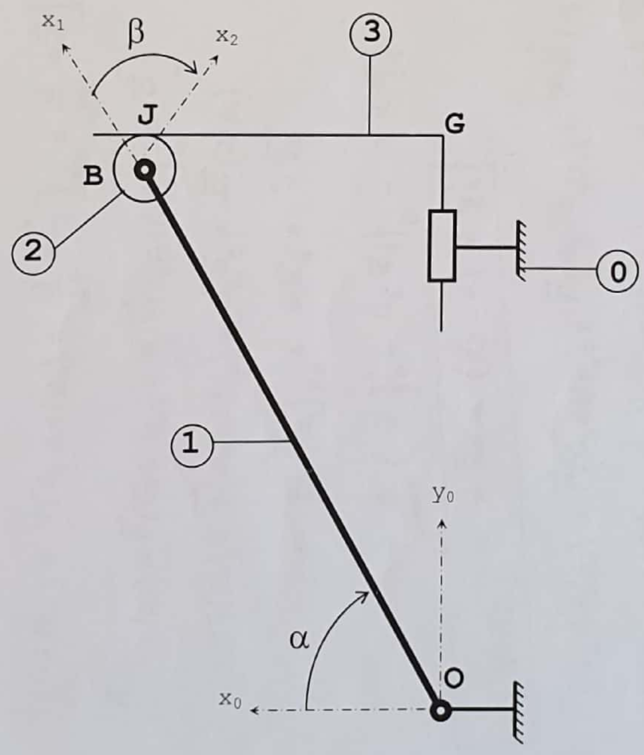



Figure 3



# CINEMATIQUE - TD2 - CORRIGE

**Exercice 1** (Voir Cours)

**Exercice 2**

1°] $\vec{\Omega}(3/2) = \boxed{\dot{\beta}\,\vec{x}_1}$ et $\vec{\Omega}(3/R_0) = \vec{\Omega}(3/2) + \cancelto{\vec{0}}{\vec{\Omega}(2/1)} + \vec{\Omega}(1/0)$

$$= \boxed{\dot{\beta}\,\vec{x}_1 + \dot{\alpha}\,\vec{z}_0}$$

2°] La Base de $R_1$ = Base de $R_2$ car 1 est en translation $/2$.

3°] $\vec{V}(G_1/R_0) = \vec{V}(G_1 \in 1/R_0) = \frac{d}{dt}\,\vec{OG_1}\Big]_{R_0} = \frac{d}{dt}\, a\vec{z}_0\Big]_{R_0} = \vec{0}$

Et: $\vec{\Gamma}(G_1/R_0) = \vec{\Gamma}(G_1 \in 1/R_0) = \frac{d}{dt}\,\vec{V}(G_1 \in 1/R_0)\Big]_{R_0} = \vec{0}$

4°] $\vec{V}(G_2 \in 2/R_0) = \vec{V}(O_2 \in 2/R_0) + \vec{G_2O_2} \wedge \vec{\Omega}(2/R_0)$

$$= \frac{d}{dt}\,\vec{OO_2}\Big]_{R_0} + a\vec{x}_1 \wedge \dot{\alpha}\,\vec{z}_0$$

$$= \frac{d}{dt}\left(z\,\vec{z}_0 + L_2\,\vec{x}_1\right)_0 - a\dot{\alpha}\,\vec{y}_1$$

$$\boxed{\vec{V}(G_2 \in 2/R_0) = \dot{z}\,\vec{z}_0 + (l_2 - a)\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1}$$

5°) $\vec{\Gamma}(G_2 \in 2/R_0) = \vec{\Gamma}(G_2 \in 2/R_1) + \vec{\Gamma}(G_2 \in R_1/R_0) + 2\,\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(G_2 \in 2/R_1)$

- $\vec{\Gamma}(G_2 \in 2/R_1) = \frac{d}{dt}\,\vec{V}(G_2 \in 2/R_1)\Big]_{R_1} = \frac{d}{dt}\,\dot{z}\,\vec{z}_0\Big]_{R_1} = \ddot{z}\,\vec{z}_0$
- $\vec{\Gamma}(G_2 \in R_1/R_0) = \cancelto{\vec{0}}{\vec{\Gamma}(O \in R_1/R_0)} + \vec{G_2O} \wedge \frac{d\vec{\Omega}}{dt}(R_1/R_0)\Big]_{R_0} + \left[\vec{G_2O} \wedge \vec{\Omega}(1/0)\right] \wedge \vec{\Omega}(1/0)$

$$= -\left(z\vec{z}_0 - (L_2 - a)\,\vec{x}_1\right) \wedge \ddot{\alpha}\,\vec{z}_0 - \dot{\alpha}^2 (L_2 - a)\,\vec{x}_1$$

$$= (L_2 - a)\left(\ddot{\alpha}\,\vec{y}_1 - \dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1\right)$$

- $\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(G_2 \in 2/R_1) = 2\dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \wedge \dot{z}\,\vec{z}_0 = \vec{0}$

D'où :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(G_2 \in R_1/R_0) = \ddot{z}\,\vec{z}_0 + (l_2 - a)\left(\ddot{\alpha}\,\vec{y}_1 - \dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1\right)}$$

6] $\vec{V}(G_3 \in 3/R_0) = \vec{V}(G_3 \in 3/2) + \vec{V}(G_3 \in 2/1) + \vec{V}(G_3 \in 1/0)$

- $\vec{V}(G_3 \in 3/2) = \frac{d}{dt}\,\vec{O_2G_3}\Big]_{R_2} = \dot{x}\,\vec{x}_1$
- $\vec{V}(G_3 \in 2/1) = \vec{V}(O_2 \in 2/1) + \vec{G_3O_2} \wedge \cancelto{\vec{0}}{\vec{\Omega}(2/1)}$

$$= \dot{z}\,\vec{z}_0$$

- $\vec{V}(G_3 \in 1/0) = \cancelto{\vec{0}}{\vec{V}(O \in 1/0)} + \vec{G_3O} \wedge \vec{\Omega}(1/0)$

$$= -\left(z\,\vec{z}_0 + l_2\,\vec{x}_1 + x\,\vec{x}_1\right) \wedge \dot{\alpha}\,\vec{z}_0$$

$$= \dot{\alpha}(l_2 + x)\,\vec{y}_1$$

D'où : $\boxed{\vec{V}(G_3 \in 3/R_0) = \dot{x}\,\vec{x}_1 + \dot{z}\,\vec{z}_0 + \dot{\alpha}(l_2 + x)\,\vec{y}_1}$

7°] . Traj. de $G_3 \in 3/2$ : Segment de droite $(G_3, \vec{x}_1)$ ;

. Traj. de $G_3 \in 2/1$ : Segment de droite $(G_3, \vec{z}_0)$ ;

. Traj. de $G_3 \in 1/0$ : Arc du cercle $\mathcal{C}(G'_3, G'_3G_3)$.

$G'_3$ : Proj. orthogonale de $G_3$ sur $(O, \vec{z}_0)$.

8°] . $\vec{y}_1 \cdot \vec{\Gamma}(G_3 \in 3/R_0) = \frac{d}{dt}\left(\vec{y}_1 \cdot \vec{V}(G_3 \in 3/0)\right) - \vec{V}(G_3 \in 3/0) \cdot \frac{d\vec{y}_1}{dt}\Big]_0$

$$= \frac{d}{dt}\left((l_2 + x)\dot{\alpha}\right) - \vec{V}(G_3 \in 3/0) \cdot \left(-\dot{\alpha}\,\vec{x}_1\right)$$

$$\boxed{\vec{y}_1 \cdot \vec{\Gamma}(G_3 \in 3/0) = (l_2 + x)\,\ddot{\alpha} + 2\dot{x}\dot{\alpha}}$$

9°] $* \{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha}\,\vec{z_0} \\ \vec{V}(G_1 \in 1/0) \end{matrix} \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha}\,\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_1}$

$* \{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \dot{\gamma}\,\vec{z_0} \end{matrix} \right\}_{G_2}$

$* \{\mathcal{V}(3/2)\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\beta}\,\vec{x_1} \\ \dot{x}\,\vec{x_1} \end{matrix} \right\}_{G_3}$

## Exercice 3

1°] La rotation de $1/0$ se transforme en une translation de $3/0$.

2°] $1/0$ : pivot / $(O, \vec{z_0})$ ;

$1/2$ : " / $(B, \vec{z_0})$ ;

$2/3$ : ponctuelle ⊥ $(J, \vec{y_0})$ ;

$3/0$ : glissière de direction $\vec{y_0}$.

3°] $\boxed{\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}\,\vec{z_0}}$ et $\boxed{\vec{\Omega}(2/0) = (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{z_0}}$

4°] $* \vec{V}(J \in 2/0) = \vec{V}(B \in 2/0) + \vec{JB} \wedge \vec{\Omega}(2/0)$

$= L_1 \dot{\alpha}\,\vec{y_1} - \frac{D_2}{2}\vec{y_0} \wedge (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{z_0}$

$= \boxed{L_1 \dot{\alpha}\,\vec{y_1} - \frac{D_2}{2}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{x_0}}$

$* \vec{V}(J \in 3/0) = \dot{y}\,\vec{y_0}$

$* \boxed{\vec{V}(J \in 3/2) = \vec{V}(J \in 3/0) - \vec{V}(J \in 2/0) = \dot{y}\,\vec{y_0} - L_1 \dot{\alpha}\,\vec{y_1} + \frac{D_2}{2}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{x_0}}$

5°] Le plan tangent commun est $(J, \vec{x_0}, \vec{z_0})$.

$\vec{V}(J \in 3/2) \cdot \vec{y_0} = 0 \Rightarrow \dot{y} - L_1 \dot{\alpha} \cos\alpha = 0$

donc : $\boxed{\dot{y} = L_1 \dot{\alpha} \cos\alpha}$ c'est la loi entrée-sortie (loi E/S) du mécanisme.

6°] $\vec{V}(J \in 3/2) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{V}(J \in 3/2) \cdot \vec{x_0} = 0 & (1). \\ \vec{V}(J \in 3/2) \cdot \vec{y_0} = 0 & \text{(déjà vue dans la Q5).} \\ \vec{V}(J \in 3/2) \cdot \vec{z_0} = 0 \end{cases}$

$(1) \Rightarrow \dot{\alpha} L_1 \sin\alpha + \frac{D_2}{2}(\dot{\alpha}+\dot{\beta}) = 0$

donc $\boxed{\dot{\beta} = -\frac{2\left(L_1 \sin\alpha + \frac{D_2}{2}\right)}{D_2}\,\dot{\alpha}}$

• $\alpha$ et $\beta$ sont de sens opposés.

## Exercice 4

1°] $\vec{\Omega}(S_1/S_0) = \dot{\alpha}\,\vec{z_0}$

$\vec{\Omega}(S_2/S_0) = \vec{\Omega}(S_2/S_1) + \vec{\Omega}(S_1/S_0) = \boxed{\dot{\beta}\,\vec{x_1} + \dot{\alpha}\,\vec{z_0}}$

2°] • $\vec{V}(A \in S_1/S_0) = \frac{d}{dt}\vec{OA}\Big|_{S_0} = \boxed{L_1 \dot{\alpha}\,\vec{y_1}}$

• $\vec{V}(A \in S_2/S_0) = \underbrace{\vec{V}(A \in S_2/S_1)}_{\vec{0}} + \vec{V}(A \in S_1/S_0) = L_1 \dot{\alpha}\,\vec{y_1}$

(A ∈ axe de la pivot $S_2 - S_1$)

3°] $\vec{V}(I \in S_2/S_0) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}(A \in S_2/S_0) + \vec{IA} \wedge \vec{\Omega}(S_2/S_0) = \vec{0}$.

$\Rightarrow (L_1 \dot{\alpha} + a\dot{\beta})\,\vec{y_1} = \vec{0}$ donc $\boxed{\dot{\beta} = -\frac{L_1}{a}\,\dot{\alpha}}$

**Exercice n°1** :

La figure (1) schématise le positionneur d'une antenne parabolique. L'ensemble est composé de :

- **Bâti (0)** lié au repère $R_0\left(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ : $\overrightarrow{z_0}$ vertical ascendant.
- **Support (1)** solidaire au repère $R_1\left(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0}\right)$. Le mouvement de (1/0) est une rotation autour de l'axe $\left(O,\overrightarrow{z_0}\right)$ paramétré par l'angle α, tq : $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)=\left(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}\right)=\alpha$.
- **Antenne parabolique (2)** solidaire au repère $R_2\left(A,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)$. Le mouvement de (2/1) est une rotation autour de l'axe $\left(A,\overrightarrow{x_1}\right)$ paramétré par l'angle β, tq : $\left(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_2}\right)=\left(\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_2}\right)=\beta$.

**Données géométriques**

$\overrightarrow{OA}=h.\overrightarrow{z_0}$ : h constante positive

$\overrightarrow{AC}=\mu.\overrightarrow{z_2}$ : μ constante positive.

$\overrightarrow{CB}=-\ell.\overrightarrow{y_2}$ : ℓ. Constante positive.

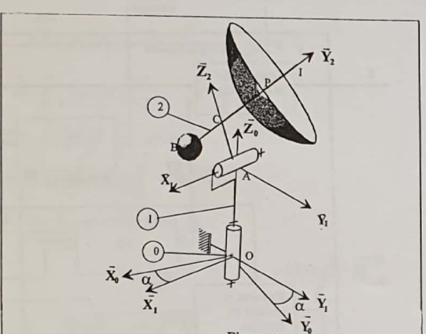



Figure 1

**Questions**

**1.1** Tracer les figures planes des rotations $R_1/R_0$ et $R_2/R_1$.

**1.2** Déterminer les vecteurs vitesse de rotation : $\vec{\Omega}(1/0)$ et $\vec{\Omega}(2/0)$.

**1.3** Déterminer les coordonnées du point B, dans le repère $R_0(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$.

**1.4** Calculer : $\overrightarrow{x_1}\wedge\overrightarrow{z_0}$ , $\overrightarrow{y_1}\wedge\overrightarrow{y_2}$ et $\overrightarrow{z_2}\wedge\overrightarrow{x_0}$.

**1.5** Calculer : $\left.\dfrac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right]_{R_2}$ , $\left.\dfrac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right]_{R_1}$ et $\left.\dfrac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right]_{R_0}$.

**1.6** Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{y_2}$ dans la base $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$.

**Problème 1 : Etude de la cinématique d'une nacele de manège**

On étudie une nacelle de manège dont le schéma est représenté ci dessous (figure 2)

La pièce 1 peut translater et tourner autour de l'axe $(O;\overrightarrow{z_1})$ par rapoort au bâti 0. La pièce 2 peut tourner autour de l'axe $(B;\overrightarrow{x_1})$ par rapport à la pièce 1. La pièce 3 peut tourner autour de l'axe $(C;\overrightarrow{z_2})$ par rapport à la pièce 2. Le paramétrage retenu est le suivant :

- $R_0(0;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ est un repère lié au bâti 0.
- $R_1(A;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}=\overrightarrow{z_0})$ est un repère lié à la pièce 1, avec $(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1})=\psi(t)$ et $\overrightarrow{OA}=\lambda(t)\overrightarrow{z_0}$.
- $R_2(B;\overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$ est un repère lié à la pièce 2, avec $(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_2})=\theta(t)$ et $\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{y_1}$.
- $R_3(C;\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3}=\overrightarrow{z_2})$ est un repère lié à la pièce 3, avec $(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_3})=\varphi(t)$ , $\overrightarrow{BC}=-b\overrightarrow{z_2}$ et $\overrightarrow{CD}=c\overrightarrow{x_3}$.

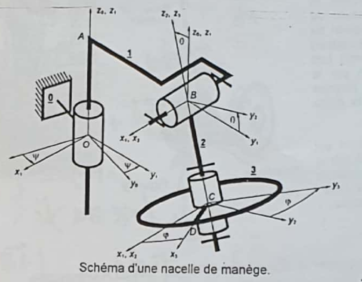
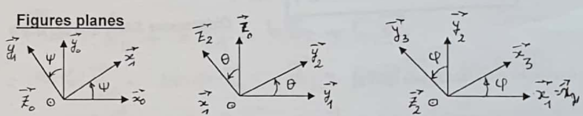


Schéma d'une nacelle de manège.

Figure 2

**λ (t) variable, (a,b et c constantes positives).**

**Figures planes**




**Questions**

**2.1** Déterminer : $\vec{\Omega}(1/0),\vec{\Omega}(2/0)$ et $\vec{\Omega}(3/0)$.

**2.2** Déterminer par dérivation : $\vec{V}(A\in 1/0)$ et $\vec{\Gamma}(A\in 1/0)$.

**2.3** Donner le torseur cinématique $_A\{V(1/0)\}$.

**2.4** Déterminer par la relation de changement de point (relation de champ) $\vec{V}(B\in 1/0)$ et $\vec{\Gamma}(B\in 1/0)$.

**2.5** Déterminer par dérivation: $\vec{V}(C\in 3/1)$ et $\vec{\Gamma}(C\in 3/1)$.

**2.6** Donner le torseur cinématique $_D\{V(3/1)\}$

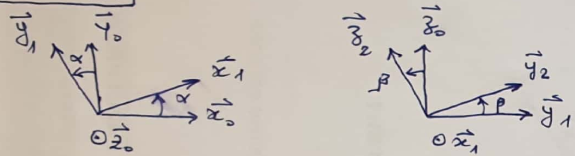
**2.7** Déterminer les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OD}$ dans la base $\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$.

**2.8** Calculer $\vec{V}(D\in 3/0).\overrightarrow{z_0}$ et $\vec{\Gamma}(D\in 3/0).\overrightarrow{z_0}$.

# CINEMATIQUE EN 1ère année - Corrigé

## Exercice n° 1

1.1]




1.2] $\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}\vec{z}_0$ $\qquad$ $\vec{\Omega}(2/0) = \dot{\alpha}\vec{z}_0 + \dot{\beta}\vec{x}_1$

1.3] $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AC} + \vec{CB} = h\vec{z}_0 + \mu\vec{z}_2 - l\vec{y}_2$

$$\vec{OB} : \left|\begin{array}{l} [\mu\sin\beta + l\cos\beta]\sin\alpha \\ -[\mu\sin\beta + l\cos\beta]\cos\alpha \\ \mu\cos\beta + h - l\sin\beta \end{array}\right._{R_0}$$

1-4] • $\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_0 = -\vec{y}_1$ $\qquad$ • $\vec{y}_1 \wedge \vec{y}_2 = \sin\beta\,\vec{x}_1$

• $\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_0 = \cos\beta\,\vec{y}_0 + \sin\beta.\cos\alpha\,\vec{z}_0$

1-5] • $\left.\dfrac{d\vec{y}_2}{dt}\right]_{R_2} = \vec{0}$ $\qquad$ • $\left.\dfrac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_1} = \dot{\beta}\vec{z}_2$

• $\left.\dfrac{d\vec{y}_2}{dt}\right]_{R_0} = \dot{\beta}\vec{z}_2 - \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{x}_1$

1-6] $\vec{y}_2 = -\cos\beta\sin\alpha\,\vec{x}_0 + \cos\beta.\cos\alpha\,\vec{y}_0 + \sin\beta\,\vec{z}_0$

## Problème 1

2.1] • $\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\varphi}\vec{z}_0$ $\qquad$ • $\vec{\Omega}(2/0) = \dot{\theta}\vec{x}_1 + \dot{\varphi}\vec{z}_0$

• $\vec{\Omega}(3/0) = \dot{\varphi}\vec{z}_2 + \dot{\theta}\vec{x}_1 + \dot{\varphi}\vec{z}_0$

2.2] • $\vec{V}(A\in 1/0) = \left.\dfrac{d\vec{OA}}{dt}\right]_{R_0} = \dot{\lambda}\vec{z}_0$

• $\vec{\Gamma}(A\in 1/0) = \ddot{\lambda}\vec{z}_0$

2.3] $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{\begin{array}{l} \dot{\varphi}\vec{z}_0 \\ \dot{\lambda}\vec{z}_0 \end{array}\right\}_A$

2-4]. $\vec{V}(B\in 1/0) = \vec{V}(A\in 1/0) + \vec{BA}\wedge\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\lambda}\vec{z}_0 - a\dot{\varphi}\vec{x}_1$

. $\vec{\Gamma}(B\in 1/0) = \ddot{\lambda}\vec{z}_0 - a\ddot{\varphi}\vec{x}_1 - a\dot{\varphi}^2\vec{y}_1$

2-5]. $\vec{V}(C\in 3/1) = \left.\dfrac{d\vec{BC}}{dt}\right]_{R_1} = b\dot{\theta}\vec{y}_2$

. $\vec{\Gamma}(C\in 3/1) = b\ddot{\theta}\vec{y}_2 + b\dot{\theta}^2\vec{z}_2$

2.6] $\{\mathcal{V}(3/1)\} = \left\{\begin{array}{l} \vec{\Omega}(3/1) \\ \vec{V}(D\in 3/1) \end{array}\right\}_D$

$\vec{V}(D\in 3/1) = \left.\dfrac{d}{dt}\vec{BD}\right]_{R_1} = b\dot{\theta}\vec{y}_2 + c\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{z}_2 + c\dot{\varphi}\vec{y}_3$

$\{\mathcal{V}(3/1)\} = \left\{\begin{array}{l} \dot{\varphi}\vec{z}_2 + \dot{\theta}\vec{x}_1 \\ b\dot{\theta}\vec{y}_2 + c\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{z}_2 + c\dot{\varphi}\vec{y}_3 \end{array}\right\}_D$

2.7] $\vec{OD} = \lambda\vec{z}_0 + a\vec{y}_1 - b\vec{z}_2 + c\vec{x}_3$

• $\vec{y}_1 = \cos\varphi\,\vec{y}_0 - \sin\varphi\,\vec{x}_0$ $\qquad$ • $\vec{z}_2 = \cos\theta\,\vec{z}_0 - \sin\theta\,\vec{y}_1$

• $\vec{x}_3 = \cos\varphi\,\vec{x}_1 + \sin\varphi\,\vec{y}_2$ $\qquad$ • $\vec{x}_1 = \cos\varphi\,\vec{x}_0 + \sin\varphi\,\vec{y}_0$

donc: $$\vec{OD}\left|\begin{array}{l} -a\sin\varphi - b\sin\theta.\sin\varphi + c\cos\varphi\cos\varphi - c\sin\varphi\cos\theta.\sin\varphi \\ a\cos\varphi + b\sin\theta\cos\varphi + c\cos\varphi\sin\varphi + c\sin\varphi.\cos\theta.\cos\varphi \\ \lambda - b\cos\theta + c\sin\varphi.\sin\theta \end{array}\right.$$

2.8] • $\vec{V}(D\in 3/0).\vec{z}_0 = \left.\dfrac{d}{dt}\vec{OD}\right]_{R_0}.\vec{z}_0 = \dfrac{d}{dt}\left[\vec{OD}.\vec{z}_0\right] - \vec{OD}.\underbrace{\left.\dfrac{d\vec{z}_0}{dt}\right]_{R_0}}_{\vec{0}}$

$= \dfrac{d}{dt}\left(\lambda - b\cos\theta + c\sin\varphi\sin\theta\right)$

• $\vec{\Gamma}(D\in 3/0).\vec{z}_0 = \dfrac{d}{dt}\left[\vec{z}_0\,\vec{V}(D\in 3/0)\right] = \dfrac{d^2}{dt^2}\left[\lambda - b\cos\theta + c\sin\varphi\sin\theta\right]$

CPGE – Marrakech – MPSI 3 – Contrôle de S.I.I – Durée : 1h00 – Prof. : Ouikassi

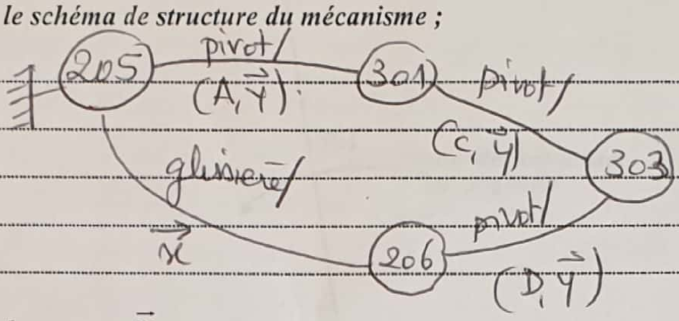
## Problème 1 : Système de correction de portée d'un phare automobile

La translation de la biellette 206/205 provoque la rotation du bloc 301/205. La vitesse de rotation du bloc d'orientation 301 par rapport au bâti 205 doit être de 0.06 rad/s ; on désire alors déterminer, graphiquement, la vitesse de translation de 206/205.

On a : AC=100mm Echelle : 8mm pour 1mm/s

On demande : (les tracés sont à effectuer sur la page 2)

1. *Dresser le schéma de structure du mécanisme ;*




2. *Tracer le vecteur* $\vec{V}_{(C\in 301/205)}$ ;

$\vec{V}(C\in 301/205)$ support : $\perp$ en C à (AC)
sens :
Norme : $AC\cdot\omega = 100\times 0{,}06 = 6\,mm/s$

3. *Justifier que* $\vec{V}_{(C\in 301/205)} = \vec{V}_{(C\in 303/205)}$ ;

Liaison pivot entre 301-303 de centre C.

4. *Donner la direction de* $\vec{V}_{(D\in 303/205)}$ ;

$\vec{V}(D\in 303/205) = \vec{V}(D\in 206/205)$ ($\mathcal{L}_{206-303}$ : pivot en D)
Donc $\vec{V}(D\in 303/205)$ est portée par $(D,\vec{x})$.

5. *Déterminer alors* $\vec{V}_{(D\in 206/205)}$ *par équiprojectivité* ;

$\vec{CD}\cdot\vec{V}(D\in 303/205) = \vec{CD}\cdot\vec{V}(C\in 303/205)$.

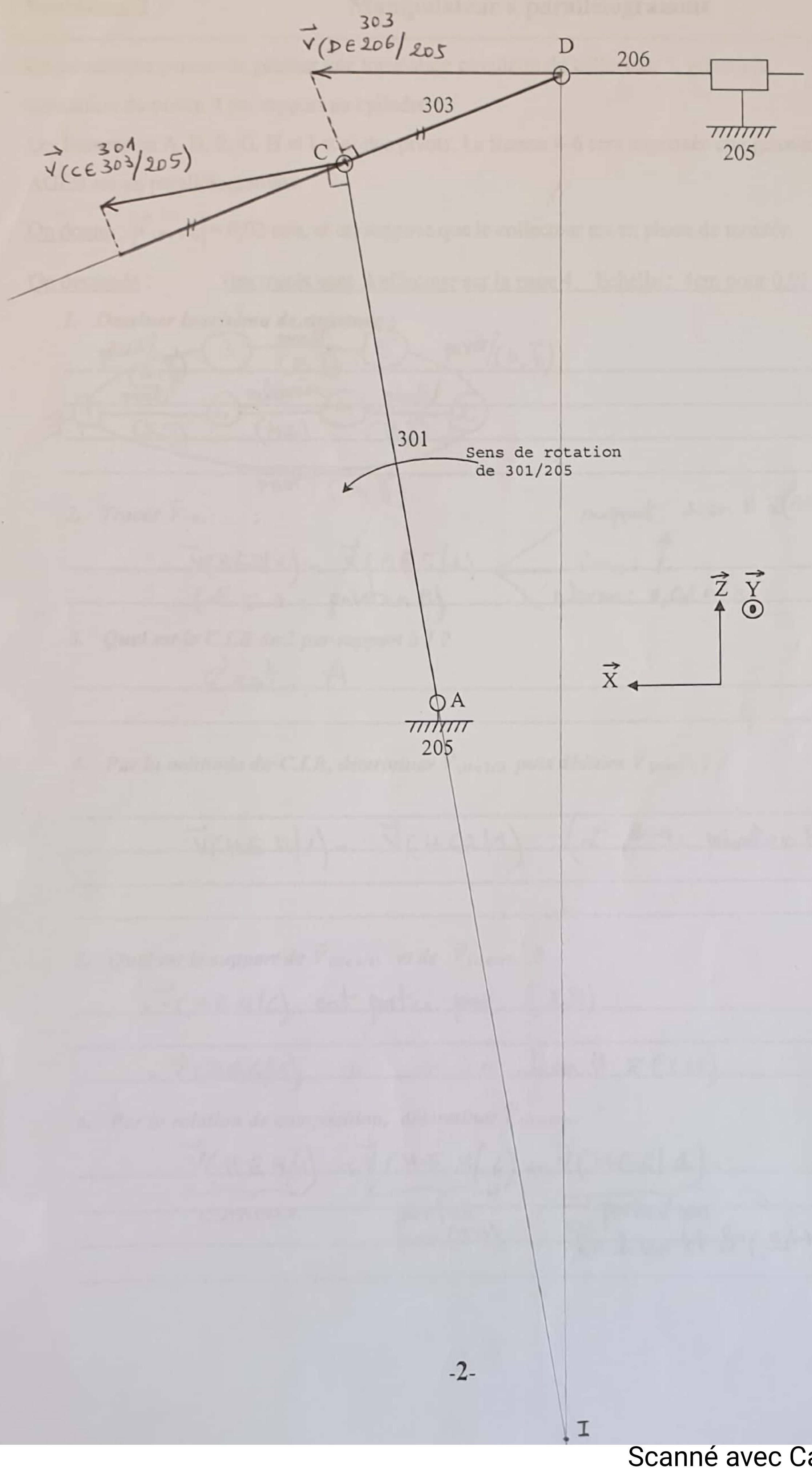
$\left|\vec{V}_{(D\in 206/205)}\right| =$ 6,06 $mm.s^{-1}$

6. *Déterminer le C.I.R de 303/205, noté I.*

$I = \underbrace{(\perp \text{ en } D \text{ à } \vec{V}(D\in 303/205))}_{(D,\vec{z})} \cap \underbrace{(\perp \text{ en } C \text{ à } \vec{V}(C\in 303/205))}_{AC}$

donc $I = (D,\vec{z}) \cap (AC)$

**Nom** : CORRIGE


303
$\vec{V}$(D∈206/205
D
206
303
205
C
301
$\vec{V}$(C∈303/205)
301
Sens de rotation
de 301/205
$\vec{Z}$
$\vec{Y}$
$\vec{X}$
A
205
I

CPGE – Marrakech – MPSI 3 – Contrôle de S.I.I – Durée : 1h00 – Prof. : Ouikassi

## Problème 2 : Manipulateur à parallélogramme

Ce mécanisme permet de générer une translation circulaire du collecteur 5, grâce à la translation du piston 4 par rapport au cylindre 6.

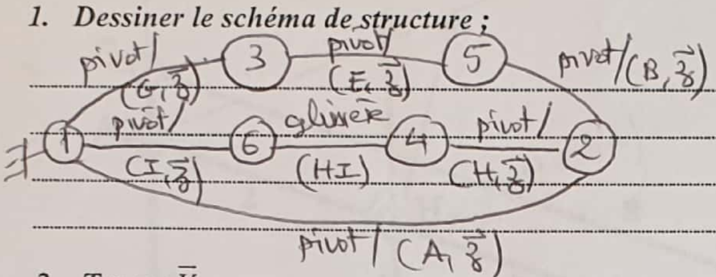
Les liaisons en A, B, E, G, H et I sont des pivots. La liaison 4-6 sera supposée une glissière.

AGEB est un parallélogramme.

On donne : $\left|\overrightarrow{V}_{(B\in 5/1)}\right| = 0{,}02$ m/s, et on suppose que le collecteur est en phase de montée.

On demande : (les tracés sont à effectuer sur la page 4. Echelle : 4cm pour 0,01 m/s)

1. ***Dessiner le schéma de structure ;***




2. ***Tracer*** $\overrightarrow{V}_{(B\in 2/1)}$ ;

$\vec V(B\in 2/1) = \vec V(B\in 5/1)$ ($\mathcal{L}_{5-2}$ : pivot en B)

support : ⊥ en B à (AB)
sens : ↑
Norme : 0,02 m/s

3. ***Quel est le C.I.R de 2 par rapport à 1 ?***

c'est : A

4. ***Par la méthode du C.I.R, déterminer*** $\overrightarrow{V}_{(H\in 2/1)}$ ***puis déduire*** $\overrightarrow{V}_{(H\in 4/1)}$ ;

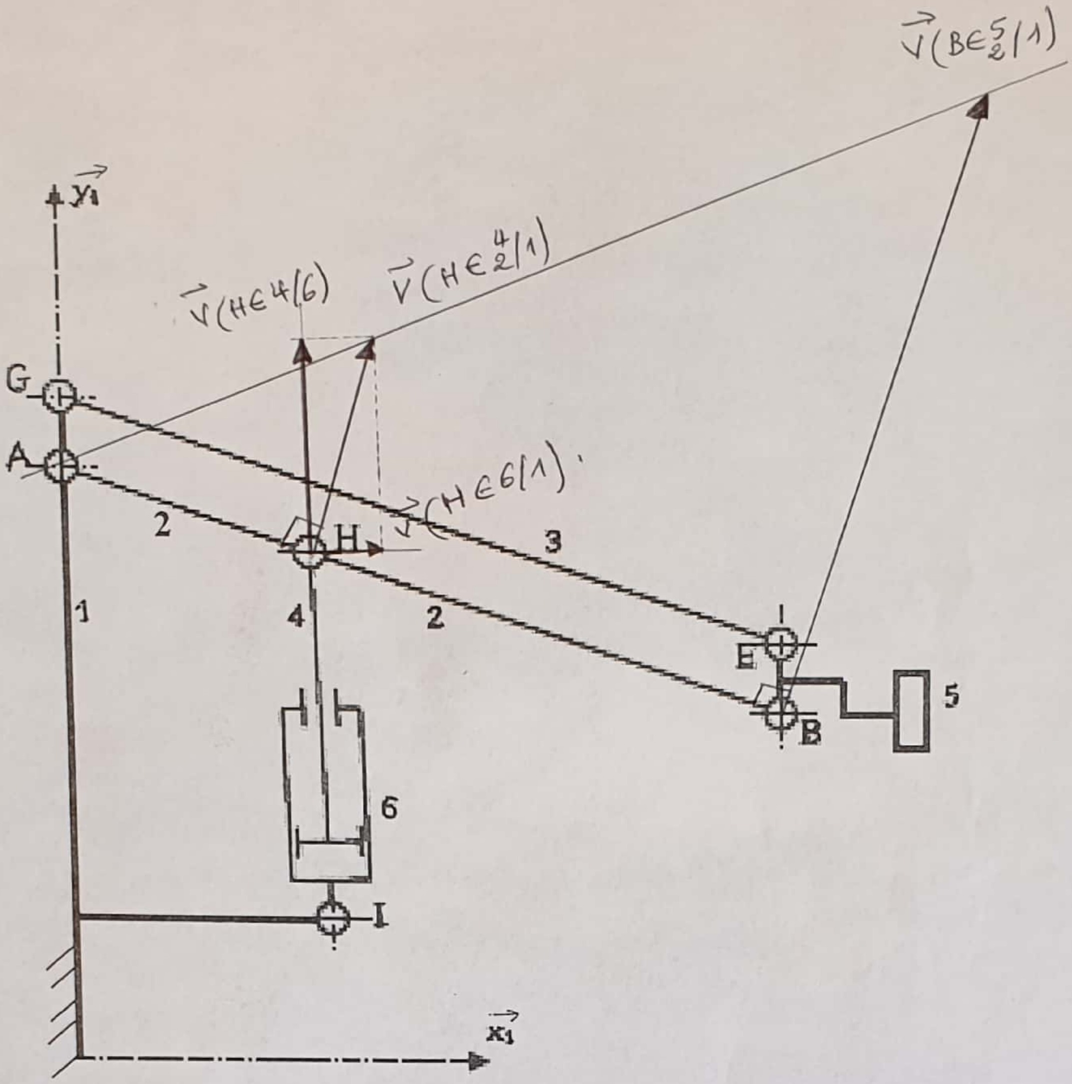
$\vec V(H\in 4/1) = \vec V(H\in 2/1)$ ($\mathcal{L}$ 2-4 : pivot en H).

5. ***Quel est le support de*** $\overrightarrow{V}_{(H\in 4/6)}$ ***et de*** $\overrightarrow{V}_{(H\in 6/1)}$ ***?***

- $\vec V(H\in 4/6)$ est portée par (IH)
- $\vec V(H\in 6/1)$ " " " ⊥ en H à (IH).

6. ***Par la relation de composition, déterminer*** $\overrightarrow{V}_{(H\in 4/6)}$.

$$\underbrace{\vec V(H\in 4/1)}_{\text{connue}} = \underbrace{\vec V(H\in 4/6)}_{\text{portée par (IH)}} + \underbrace{\vec V(H\in 6/1)}_{\text{portée par la ⊥ en H à (IH)}}$$




**Résultats** :

$\left|\vec{V}_{(H\in 2/1)}\right| = 6{,}75.10^{-3}$ m/s

$\left|\vec{V}_{(H\in 4/1)}\right| = 6{,}75.10^{-3}$ m/s

$\left|\vec{V}_{(H\in 4/6)}\right| = 6.10^{-3}$ m/s

**PREMIER PROBLEME : ROBOT A QUATRE AXES**

Le système représenté sur la figure (Page 2) est un Robot à quatre axes. En robotique un axe est une liaison motorisée. Le robot est constitué :

- D'une base fixe (0), repère lié $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ supposé galiléen.
- D'un fût (1), repère lié $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ en liaison pivot parfaite d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec la base (0). On note : $\theta_1=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)$.
- D'un bras (2), repère lié $R_2(A,\vec{x}_1,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$, en liaison pivot parfaite d'axe $(A,\vec{x}_1)$ avec le fût (1). On note $\theta_2=(\vec{y}_1,\vec{y}_2)=(\vec{z}_0,\vec{z}_2)$ et $\overrightarrow{OA}=a\,\vec{z}_0$ (a constante). Masse : $m_2$ ; Centre d'inertie $G_2$ tel que $\overrightarrow{AG_2}=\ell_2\vec{y}_2$ ($\ell_2$ constante) ;
- D'un avant bras (3), repère lié $R_3(B,\vec{x}_1,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$, en liaison pivot parfaite d'axe $(B,\vec{x}_1)$ avec le bras (2). On note : $\theta_3=(\vec{y}_2,\vec{y}_3)=(\vec{z}_2,\vec{z}_3)$, $\overrightarrow{AB}=b\,\vec{y}_2$ et $\overrightarrow{BC}=c\,\vec{y}_3$ (b et c des constantes). Masse : $m_3$ ; Centre d'inertie $G_3$ tel que $\overrightarrow{BG_3}=\ell_3\vec{y}_3$ ($\ell_3$ constante) ;
- D'un organe terminal (4), repère lié $R_4(D,\vec{x}_1,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$ en liaison glissière parfaite de direction $\vec{z}_3$ avec l'avant bras (3). On note $\overrightarrow{CD}=-\lambda(t)\vec{z}_3$. Masse : $m_4$ ; Centre d'inertie $G_4$ tel que $\overrightarrow{DG_4}=\ell_4\vec{z}_3$ ($\ell_4$ constante) ;

1) Donner les vecteurs rotations $\vec{\Omega}(4/3)$, $\vec{\Omega}(3/2)$, $\vec{\Omega}(2/1)$, $\vec{\Omega}(1/0)$.

* $\vec{\Omega}(4/3)=\vec{0}$ (Liaison glissière ⇓ pas de Rotation)
* $\vec{\Omega}(3/2)=\dot{\theta}_3\,\vec{x}_1$
* $\vec{\Omega}(2/1)=\dot{\theta}_2\,\vec{x}_1$
* $\vec{\Omega}(1/0)=\dot{\theta}_1\,\vec{z}_0$

2) Déterminer $\vec{V}_{(B\in 2/R0)}$ par dérivation.

$\vec{V}(B\in 2/0)=\frac{d}{dt}\overrightarrow{OB}\Big]_0=\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\Big]_0$

$=\frac{d}{dt}b\vec{y}_2\Big]_0=b\frac{d\vec{y}_2}{dt}\Big]_0$

$=b\left(\vec{\Omega}(2/0)\wedge\vec{y}_2\right)$

$=b\left((\dot{\theta}_2\vec{x}_1+\dot{\theta}_1\vec{z}_0)\wedge\vec{y}_2\right)$

$=b\left[\dot{\theta}_2\vec{z}_2-\dot{\theta}_1\cos\theta_2\,\vec{x}_1\right]$

D'où :

$\boxed{\vec{V}(B\in 2/0)=b\left[\dot{\theta}_2\vec{z}_2-\dot{\theta}_1\cos\theta_2\,\vec{x}_1\right]}$

3) Déterminer $\vec{V}_{(C\in 3/R0)}$ par la relation de champ de moments.

$\vec{V}(C\in 3/R_0)=\vec{V}(B\in 3/0)+\overrightarrow{CB}\wedge\vec{\Omega}(3/0)$

on a : $\vec{V}(B\in 3/0)=\vec{V}(B\in 3/2)+\vec{V}(B\in 2/0)$

$\vec{V}(B\in 3/2)=\vec{0}$ : B centre de la pivot (2-3)

donc :

$\vec{V}(C\in 3/0)=\vec{V}(B\in 2/0)+\overrightarrow{CB}\wedge\vec{\Omega}(3/0)$

$=b(\dot{\theta}_2\vec{z}_2-\dot{\theta}_1\cos\theta_2\vec{x}_1)-c\vec{y}_3\wedge\left((\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\vec{x}_1+\dot{\theta}_1\vec{z}_0\right)$

$=b(\dot{\theta}_2\vec{z}_2-\dot{\theta}_1\cos\theta_2\vec{x}_1)-c\left(-(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\vec{z}_3+\dot{\theta}_1\cos(\theta_2+\theta_3)\vec{x}_1\right)$

D'où :

$\boxed{\vec{V}(C\in 3/0)=-\dot{\theta}_1\left[b\cos\theta_2+c\cos(\theta_2+\theta_3)\right]\vec{x}_1+b\dot{\theta}_2\vec{z}_2+c(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\vec{z}_3}$

4) Déterminer $\vec{V}_{(D\in 4/R0)}$ par la relation de composition en faisant intervenir le solide 3.

$\vec{V}(D\in 4/0)=\vec{V}(D\in 4/3)+\vec{V}(D\in 3/0)$

* $\vec{V}(D\in 4/3)=\frac{d}{dt}\overrightarrow{CD}\Big]_3=\frac{d}{dt}(-\lambda\vec{z}_3)\Big]_3$

$=-\dot{\lambda}(t)\vec{z}_3$

* $\vec{V}(D\in 3/0)=\vec{V}(C\in 3/0)+\overrightarrow{DC}\wedge\vec{\Omega}(3/0)$

$\overrightarrow{DC}\wedge\vec{\Omega}(3/0)=\lambda\vec{z}_3\wedge\left((\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\vec{x}_1+\dot{\theta}_1\vec{z}_0\right)$

$=\lambda\left[(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\vec{y}_3-\dot{\theta}_1\sin(\theta_2+\theta_3)\vec{x}_1\right]$

D'où :

$\boxed{\vec{V}(D\in 3/0)=-\dot{\theta}_1\left[b\cos\theta_2+c\cos(\theta_2+\theta_3)+\lambda\sin(\theta_2+\theta_3)\right]\vec{x}_1+b\dot{\theta}_2\vec{z}_2+c(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\vec{z}_3+\lambda(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\vec{y}_3-\dot{\lambda}\vec{z}_3}$

Nom : CORRIGE

5) Après la fin de l'opération de soudage, le robot effectue un dégagement rapide du solide (4) afin de permettre l'enlèvement de la pièce soudée et l'arrivée d'une nouvelle pièce à souder.

Lors de cette phase on doit maintenir le solide (2) en position verticale et le solide (3) en position horizontale c'est-à-dire $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_3 = -\frac{\pi}{2}$ par contre $\theta_1$ et $\lambda$ restent variables. ($\theta_2$ et $\theta_3$ : Constantes)

**Dans ces conditions, déterminer :** $\overline{\Gamma}_{(G4\in 4,R0)}.\overline{Z_0}$

$\vec{Z}_0 . \vec{\Gamma}(G4\in 4/0) = \vec{Z}_0 . \frac{d}{dt}\vec{V}(G_4\in 4/0)\Big]_0$

$= \frac{d}{dt}\left[\vec{Z}_0 . \vec{V}(G_4\in 4/0)\right] - \vec{V}_{(G_4\in 4/0)} . \cancel{\frac{d\vec{Z}_0}{dt}\Big]_0}_{0}$

et : $\vec{Z}_0 . \vec{V}_{(G4\in 4/0)} = \vec{Z}_0 . \frac{d\vec{AG4}}{dt}\Big]_0$

$= \frac{d}{dt}\left[\vec{Z}_0 . \vec{AG_4}\right] - \vec{AG_4} . \cancel{\frac{d\vec{Z}_0}{dt}\Big]_0}_{0}$

on a : $\vec{Z}_0 . \vec{AG_4} = \vec{Z}_0 (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DG_4})$

$= \vec{Z}_0 (b\vec{Y}_2 + c\vec{Y}_3 + (-\lambda)\vec{Z}_3 + l_4 \vec{Z}_3)$

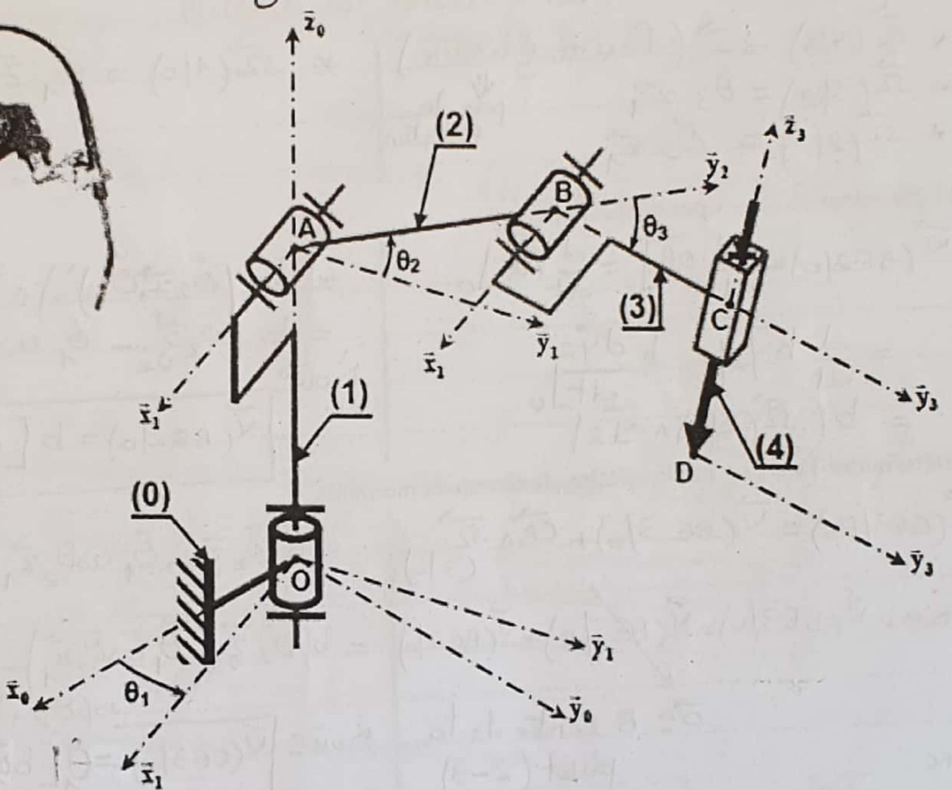
$= b\sin\theta_2 + c\sin(\theta_2+\theta_3) + (l_4-\lambda)\cos(\theta_2+\theta_3)$

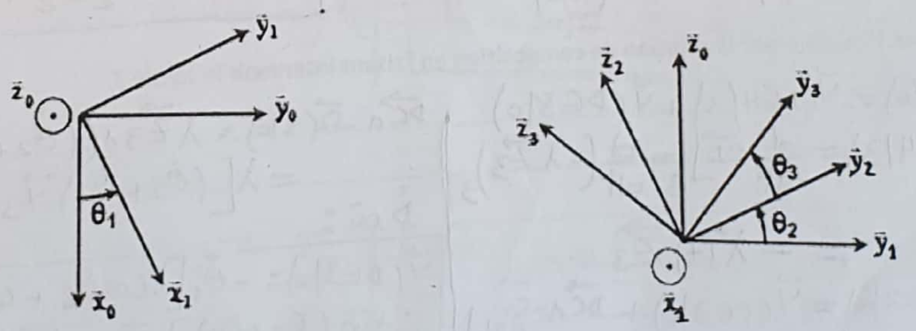
Rappel : $\theta_2 = \pi/2$ , $\theta_3 = -\pi/2$ ($\theta_2, \theta_3$ : ctes)

$\vec{Z}_0 . \vec{AG_4} = b + l_4 - \lambda$

D'où :

$$\boxed{\vec{Z}_0 . \vec{\Gamma}(G_4 \in 4/0) = -\ddot{\lambda}}$$



DEUXIEME PROBLEME : BUTEE A BILLES

Considérons une butée à billes constituée d'un ensemble de billes en contact avec un rotor (S1) et un bâti (S0).L'étude cinématique proposée ne s'intéresse qu'à une seule bille (S2) en contact avec le solide (S1) en D avec roulement sans glissement, et en contact avec le solide (S0) en A et B avec roulement sans glissement. Les contacts en B et A entre (S2) et (S0) sont de type Sphère/Plan.

On considère:

$R_0(O,\vec x_0,\vec y_0,\vec z_1)$ le repère lié au bâti (S0)

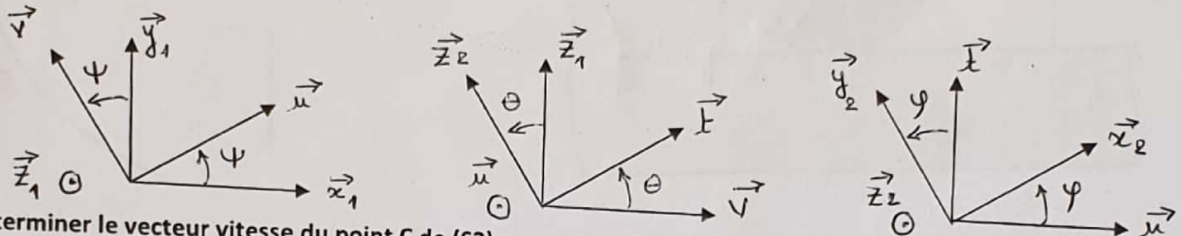
$R_1(O,\vec x_1,\vec y_1,\vec z_1)$ le repère lié au vecteur tournant $\overrightarrow{OC}$

$R_2(O,\vec x_2,\vec y_2,\vec z_2)$ le repère lié à la bille (S2)

$\|\overrightarrow{CA}\| = a$ , $\|\overrightarrow{OC}\| = R$ , $\vec\Omega_{S1/S0} = \dot\alpha\vec z_1$ , $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AB}$

Les angles d'Euler traduisant les mobilités en rotation de la bille seront notés $(\Psi,\vec z_1),(\theta,\vec u),(\varphi,\vec z_2)$. Ils permettent de passer progressivement de la base $(\vec x_1,\vec y_1,\vec z_1)$ à la base $(\vec x_2,\vec y_2,\vec z_2)$ liée à (S2).

$$(\vec x_1,\vec y_1,\vec z_1)\xrightarrow{(\Psi,\vec z_1)}(\vec u,\vec v,\vec z_1)\xrightarrow{(\theta,\vec u)}(\vec u,\vec t,\vec z_2)\xrightarrow{(\varphi,\vec z_2)}(\vec x_2,\vec y_2,\vec z_2)$$




**1) Déterminer le vecteur vitesse du point C de (S2) par rapport à (S0) par dérivation : $\vec V_{(C\in S2/S0)}$.**

$\vec V(C\in S2/S0) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OC})_0 = \frac{d}{dt}R\vec x_1\Big]_0$

$= R\frac{d}{dt}\vec x_1\Big]_0 = R\,\vec\Omega(1/0)\wedge\vec x_1$

$= R\dot\alpha\vec z_1\wedge\vec x_1$

Donc: $\boxed{\vec V(C\in S2/S0) = R\dot\alpha\vec y_1}$

**2) Déterminer le vecteur vitesse de rotation de (S2) par rapport à 0 : $\vec\Omega_{(S2/S0)}$**

$\vec\Omega(S2/S0) = \vec\Omega(S2/S_1)+\vec\Omega(S_1/S_0)$

$= \dot\alpha\vec z_1+\dot\psi\vec z_1+\dot\theta\vec u+\dot\varphi\vec z_2$

Donc: $\boxed{\vec\Omega(S2/S0) = (\dot\alpha+\dot\psi)\vec z_1+\dot\theta\vec u+\dot\varphi\vec z_2}$

**3) Déterminer le vecteur vitesse $\vec V_{(A\in S2/S0)}$,**

$\vec V(A\in S2/S0) = \vec V(C\in S2/S0)+\overrightarrow{AC}\wedge\vec\Omega(S2/S0)$

$= R\dot\alpha\vec y_1+(-a)\vec x_1\wedge[(\dot\alpha+\dot\psi)\vec z_1+\dot\theta\vec u+\dot\varphi\vec z_2]$

$= R\dot\alpha\vec y_1 - a[(\dot\alpha+\dot\psi)\vec x_1\wedge\vec z_1+\dot\theta\vec x_1\wedge\vec u+\dot\varphi\vec x_1\wedge\vec z_2]$

$*\ \vec x_1\wedge\vec z_1 = -\vec y_1$

Nom : CORRIGE

$* \ \vec{x}_1 \wedge \vec{u} = \sin\psi \, \vec{z}_1$

$* \ \vec{x}_1 \wedge \vec{z}_2 = \vec{x}_1 \wedge (\cos\theta \vec{z}_1 - \sin\theta \vec{v})$

$= -\cos\theta \, \vec{y}_1 - \sin\theta \cos\psi \, \vec{z}_1$

ou encore :

$\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_2 = (\cos\psi \vec{u} - \sin\psi \vec{v}) \wedge \vec{z}_2$

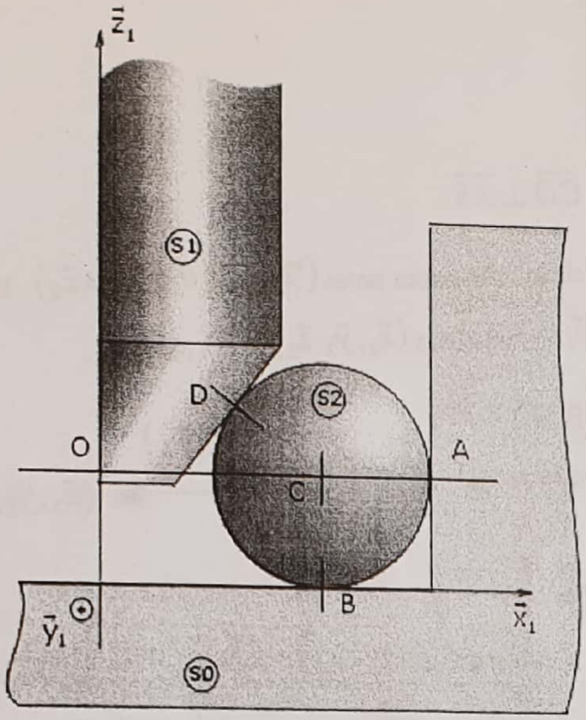
$= -\cos\psi \, \vec{t} - \sin\psi \cos\theta \, \vec{u}$

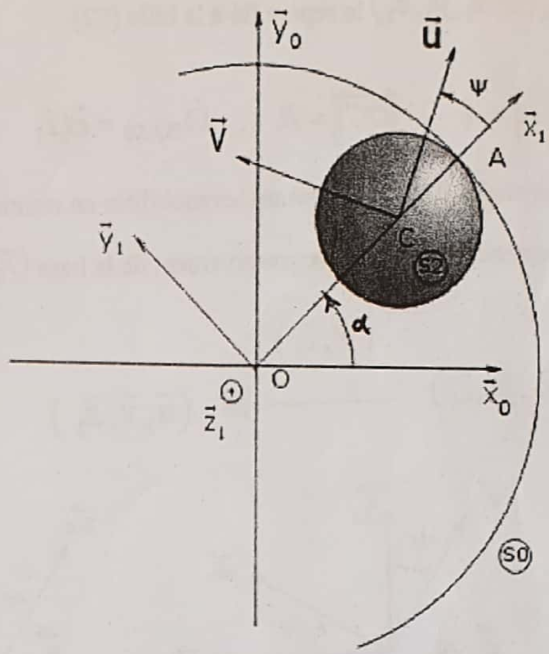
D'où :

$$\boxed{\vec{V}(A\in S_2/S_0) = \left[R\dot{\alpha} + a(\dot{\alpha}+\dot{\psi}) + a\dot{\varphi}\cos\theta\right]\vec{y}_1 + -a(\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)\,\vec{z}_1}$$

ou encore :

$$\boxed{\vec{V}(A\in S_2/S_0) = \left[R\dot{\alpha} + a(\dot{\alpha}+\dot{\psi})\right]\vec{y}_1 - a\dot{\theta}\sin\psi\,\vec{z}_1 + a\dot{\varphi}(\cos\psi\,\vec{t} + \sin\psi\cos\theta\,\vec{u})}$$




**4) Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}_{(B\in S2/S0)}$ ,**

$\vec{V}(B\in S_2/S_0) = \vec{V}(C\in S_2/S_0) + \vec{BC}\wedge\vec{\Omega}(S_2/S_0)$

$= R\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + a\,\vec{z}_1 \wedge \left((\dot{\psi}+\dot{\alpha})\vec{z}_1 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{z}_2\right)$

$$\boxed{= R\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + a\dot{\theta}\,\vec{v} + a\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}}$$

**5) Ecrire la condition de roulement sans glissement au point A puis et déduire deux équations scalaires dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$.**

$\vec{V}(A\in S_2/S_0) = \vec{0}$

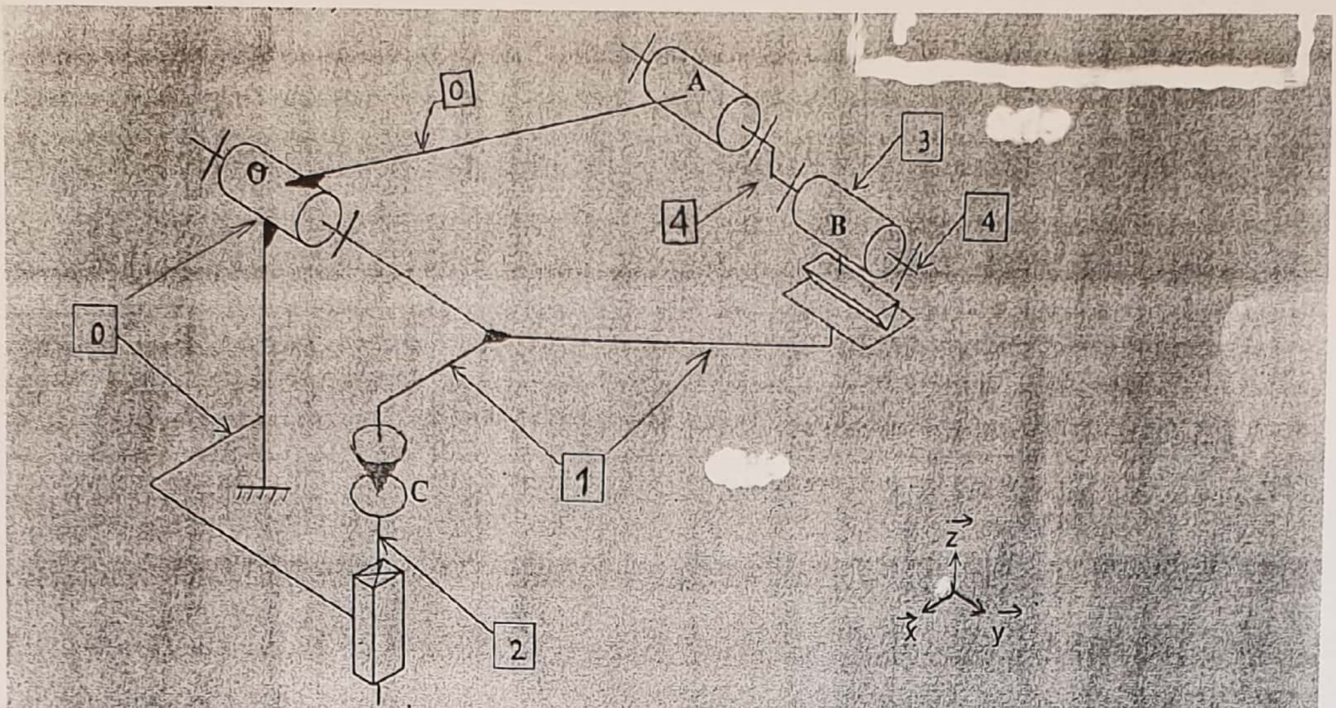
D'où les équations scalaires :

$$\boxed{R\dot{\alpha} + a(\dot{\alpha}+\dot{\psi}) + a\dot{\varphi}\cos\theta = 0}$$

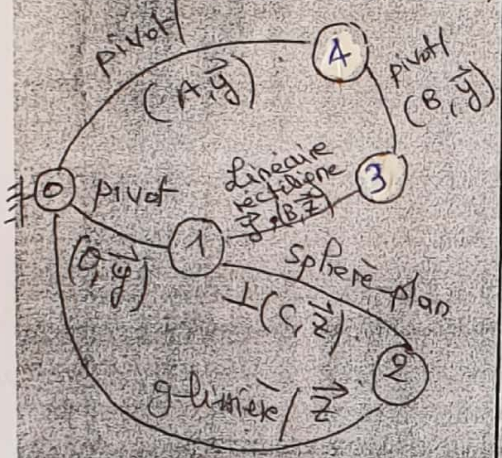
et :

$$\boxed{a(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi) = 0}$$

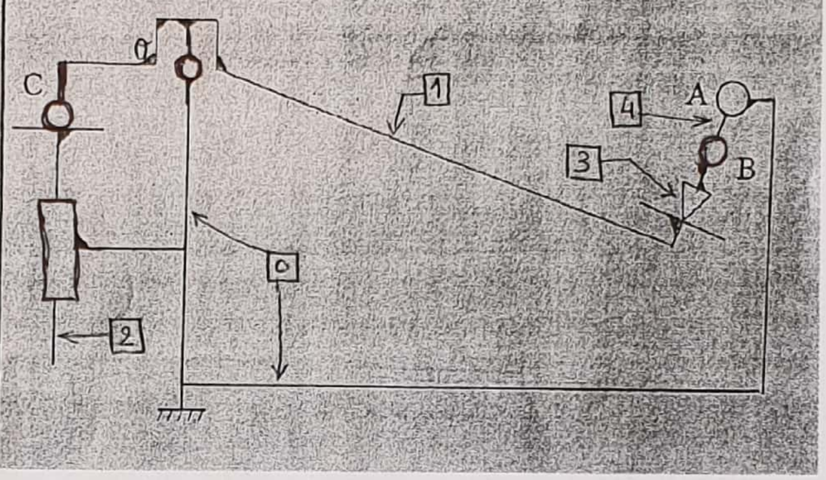
TROISIEME PROBLEME : PERFORATRICE




Q.1.Graphe des liaisons (à tracer)




Q.2.schéma cinématique plan (à compléter):




**Q3. Compléter le tableau suivant :**

| Solides liés | Torseur cinématique | Ensemble de Bases | Ensemble de points |
|---|---|---|---|
| 0-1 | $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ | $(-, \vec{y}, -)$ | ∀ pt. $(O, \vec{y})$. |
| 1-2 | $\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$ | $(-, -, \vec{z})$. | ∀ pt. $(C, \vec{z})$. |
| 1-3 | $\begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$ | $(-, \vec{y}, \vec{z})$ | ∀ pt. $(B, \vec{y}, \vec{z})$ |
| 0-2 | $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_z \end{Bmatrix}$ | $(-, -, \vec{z})$. | ∀ pt. Espace |

CPGE
Marrakech

**Devoir surveillé de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur**

**Durée :** 1h 20mn
**Prof. :** Ouikassi

## PROBLEME 1 : MEULE DE MOULIN A VENT

Une meule de moulin à vent permet de moudre les grains de blé.

Pour cela, une meule cylindrique (*Voir figure 1*) roule sans glisser sur un plan horizontal et tourne autour d'un axe vertical.

Le mécanisme est constitué de :

- Bâti fixe (**S₀**) : repère lié $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Le plan $(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ est horizontal.
- Bras ($S_1$) : repère lié $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$.

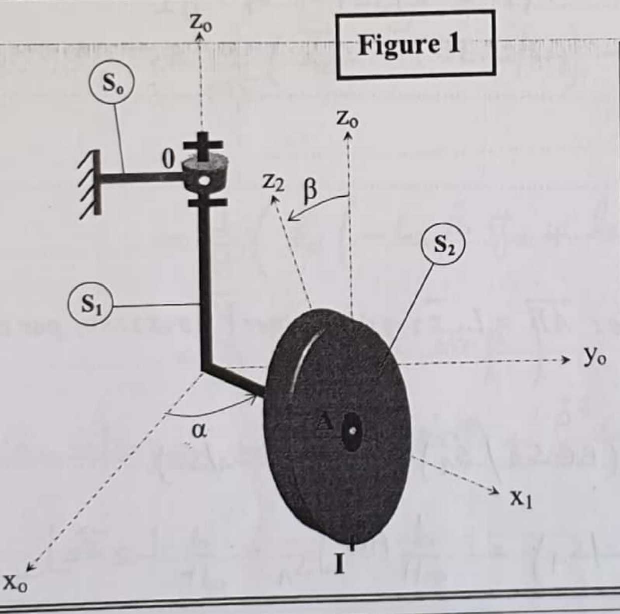
  En rotation par rapport à ($S_0$) autour de l'axe $(O,\vec{z}_0)$, de paramètre $\alpha$.

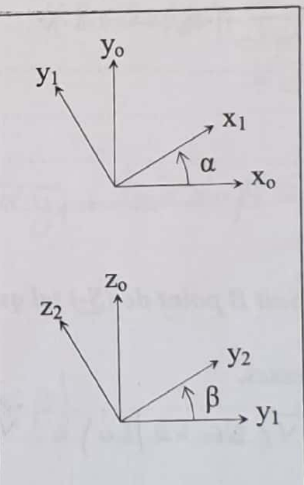
  $\overrightarrow{OA} = h_1\vec{z}_0 + L_1\vec{x}_1$ ( $h_1$ et $L_1$ : constantes).
- Meule ($S_2$) : repère lié $R_2(A,\vec{x}_1,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$.

  De forme cylindrique de rayon **a**, en rotation par rapport à ($S_1$) autour de l'axe $(A,\vec{x}_1)$, de paramètre $\beta$.

  **I** : point de la ligne de contact entre la meule et le plan horizontal de ($S_0$) : $\overrightarrow{AI} = -a\,\vec{z}_0$.

**Figure 1**




**Figures planes**

## Répondre aux questions suivantes :

**1- Determiner $\vec{\Omega}_{(S1/S0)}$ et $\vec{\Omega}_{(S2/S0)}$.**

$\vec{\Omega}(S_1/S_0) = \dot{\alpha}\,\vec{z}_0$

$\vec{\Omega}(S_2/S_0) = \vec{\Omega}(S_2/S_1) + \vec{\Omega}(S_1/S_0)$

$= \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 + \dot{\beta}\,\vec{x}_1$

**2- Déterminer $\vec{V}_{(A\in S1/S0)}$ par dérivation, puis déduire $\vec{V}_{(A\in S2/S0)}$.**

* $\vec{V}(A\in S_1/S_0) = \frac{d}{dt}\vec{OA}\Big]_{R_0} = \frac{d}{dt}\left(h_1\vec{z}_0 + l_1\vec{x}_1\right)\Big]_{R_0}$

$\vec{V}(A\in S_1/S_0) = l_1\,\frac{d\vec{x}_1}{dt}\Big]_{R_0} = l_1\left(\vec{\Omega}(S_1/S_0)\wedge\vec{x}_1\right)$

$= l_1\,\dot{\alpha}\,\vec{z}_0\wedge\vec{x}_1 = l_1\dot{\alpha}\,\vec{y}_1$

* $\vec{V}(A\in S_2/S_0) = \underbrace{\vec{V}(A\in S_2/S_1)}_{\to 0} + \vec{V}(A\in S_1/S_0)$

(A : centre de la pivot $S_2 - S_1$)

donc : $\vec{V}(A\in S_2/S_0) = l_1\dot{\alpha}\,\vec{y}_1$

**3- Soit B point de ($\underline{S_2}$) tel que : $\vec{AB} = L_2\,\vec{z}_2$ ; déterminer $\vec{V}_{(B\in S2/S0)}$ par composition des vitesses.**

$\vec{V}(B\in S_2/S_0) = \vec{V}(B\in S_2/S_1) + \vec{V}(B\in S_1/S_0)$

Avec : $\vec{V}(B\in S_2/S_1) = \frac{d}{dt}\vec{AB}\Big]_{S_1} = \frac{d}{dt}L_2\vec{z}_2\Big]_{S_1}$

$$\vec{V}(B\in S_2/S_1) = L_2 \frac{d}{dt}\vec{z}_2\Big]_{S_1} = L_2\, \vec{\Omega}(S_2/S_1)\wedge\vec{z}_2 = L_2\, \dot{\beta}\vec{x}_1\wedge\vec{z}_2$$

$$\vec{V}(B\in S_2/S_1) = -L_2\,\dot{\beta}\,\vec{y}_2$$

et $\vec{V}(B\in S_1/S_0) = \vec{V}(A\in S_1/S_0) + \vec{BA}\wedge\vec{\Omega}(S_1/S_0)$

$$= l_1\dot{\alpha}\vec{y}_1 - L_2\vec{z}_2\wedge\dot{\alpha}\vec{z}_0$$

$$= l_1\dot{\alpha}\vec{y}_1 + L_2\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_1$$

Finalement :

$$\vec{V}(B\in S_2/S_0) = -L_2\dot{\beta}\vec{y}_2 + l_1\dot{\alpha}\vec{y}_1 + L_2\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_1$$

**4- Déterminer** $\vec{z}_0\,.\vec{\Gamma}_{(B\in S2/S0)}$ ***en effectuant le minimum de calcul possible.***

$$\vec{z}_0.\vec{\Gamma}(B\in S_2/S_0) = \vec{z}_0.\frac{d}{dt}\vec{V}(B\in S_2/S_0)\Big]_{R_0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{z}_0.\vec{V}(B\in S_2/S_0)\right) - \vec{V}(B\in S_2/S_0).\cancel{\frac{d}{dt}\vec{z}_0}\Big]_{R_0} \quad \vec{0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{z}_0\left(-L_2\dot{\beta}\vec{y}_2 + l_1\dot{\alpha}\vec{y}_1 + L_2\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_1\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(-L_2\dot{\beta}\sin\beta\right)$$

Donc $\vec{z}_0.\vec{\Gamma}(B\in S_2/S_0) = -L_2\left(\ddot{\beta}\sin\beta + \dot{\beta}^2\cos\beta\right)$

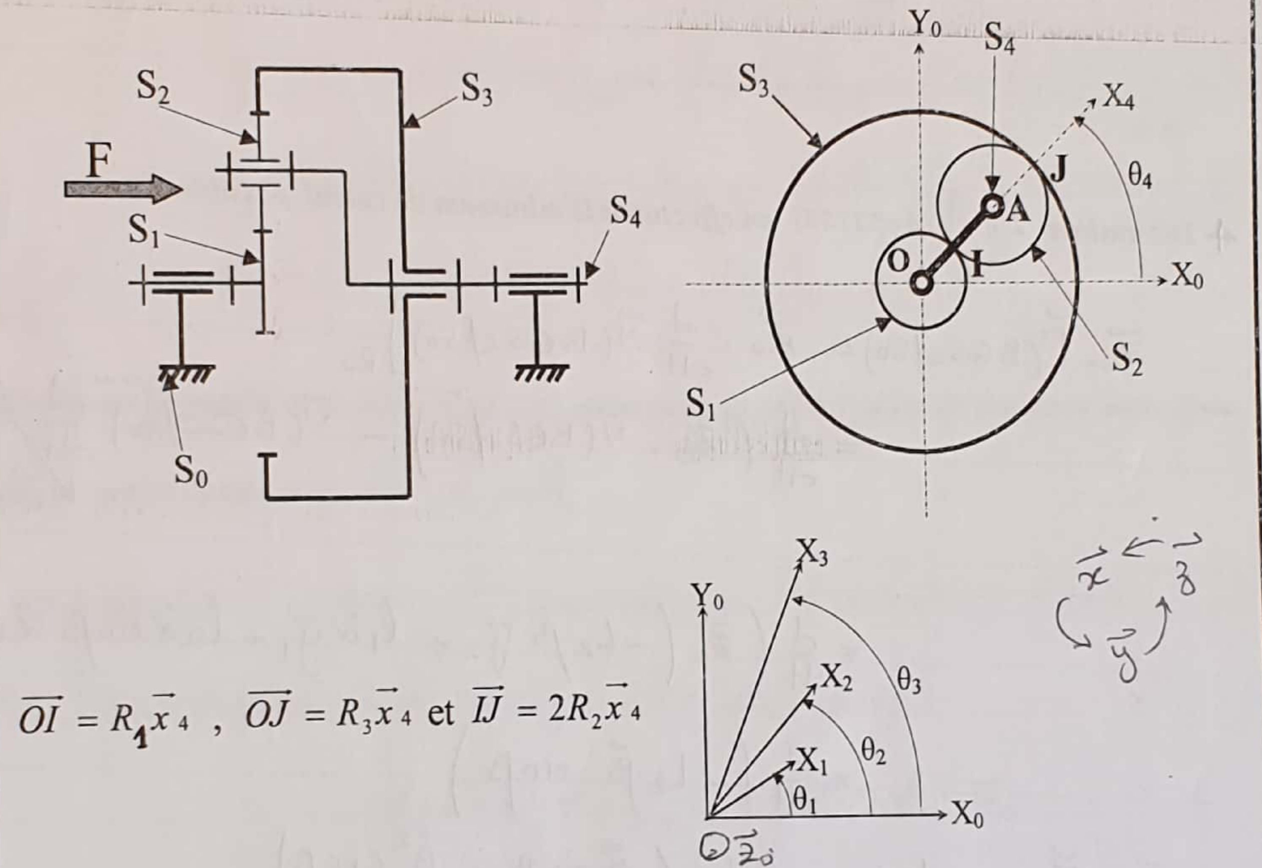
## PROBLEME 2 : TRAIN EPICYCLOIDAL

On considère un train épicycloïdal dont les schémas sont représentés sur **la figure 2** ci-dessous. Ce mécanisme joue le rôle d'un réducteur de vitesse de rotation.

Il est composé de :

- Un bâti **S₀** fixe : repère lié $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.
- Planétaire d'entrée **$S_1$** : en liaison pivot par rapport à **$S_0$** autour de $(O,\vec{z}_0)$. Repère lié $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$.
- Satellite **$S_2$** : en liaison pivot par rapport à **$S_4$** autour de $(A,\vec{z}_0)$. Repère lié $R_2(A,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0)$.
- Couronne **$S_3$** : planétaire de sortie, en liaison pivot par rapport à **$S_0$** autour de $(O,\vec{z}_0)$. Repère lié $R_3(O,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)$.
- Porte satellite **$S_4$** : en liaison pivot par rapport à **$S_0$** autour de $(O,\vec{z}_0)$. Repère lié $R_4(O,\vec{x}_4,\vec{y}_4,\vec{z}_0)$.

**Figure 2**




$\overrightarrow{OI} = R_1\vec{x}_4$ , $\overrightarrow{OJ} = R_3\vec{x}_4$ et $\overrightarrow{IJ} = 2R_2\vec{x}_4$



Scanné avec CamScanner

On désire établir la relation connue sous le nom de : « **relation de Willis** » et très utilisée dans la construction des réducteurs. Pour cela, il vous est demandé de répondre aux questions suivantes :

***1- Exprimer la condition de roulement sans glissement au point I, point de tangence entre $\underline{S_1}$ et $\underline{S_2}$, et trouver une relation entre $\dot{\theta}_1$ , $\dot{\theta}_2$ et $\dot{\theta}_4$ .***

Remarquons d'abord que $\begin{cases} O : \text{pt. de } S_0, S_1, S_3 \text{ et } S_4 ; \\ A : \text{pt. de } S_2 \text{ et } S_4. \end{cases}$

$\vec{V}(I \in S_1/S_2) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}(I \in S_1/S_0) = \vec{V}(I \in S_2/S_0)$ (*) (I n'est un pt ni de $S_1$ ni de $S_2$).

Avec : $\vec{V}(I \in S_1/S_0) = \underbrace{\vec{V}(O \in S_1/S_0)}_{\vec{0}} + \vec{IO} \wedge \vec{\Omega}(S_1/S_0) = -R_1 \vec{x}_4 \wedge \dot{\theta}_1 \vec{z}_0$

$\vec{V}(I \in S_1/S_0) = +R_1 \dot{\theta}_1 \vec{y}_4$

et $\vec{V}(I \in S_2/S_0) = \vec{V}(A \in S_2/S_0) + \vec{IA} \wedge \vec{\Omega}(S_2/S_0) = \frac{d}{dt}\vec{OA}\Big]_{S_0} + R_2 \vec{x}_4 \wedge \dot{\theta}_2 \vec{z}_0$

$= \frac{d}{dt}(R_1 + R_2)\vec{x}_4\Big]_{R_0} - R_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_4 = (R_1 + R_2)\frac{d\vec{x}_4}{dt}\Big]_{R_0} - R_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_4$

$= (R_1 + R_2)\, \vec{\Omega}(S_4/S_0) \wedge \vec{x}_4 - R_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_4 = (R_1 + R_2)\dot{\theta}_4 \vec{y}_4 - R_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_4$

$(*)/\vec{y}_4 \Rightarrow \quad R_1 \dot{\theta}_1 = (R_1 + R_2)\, \dot{\theta}_4 - R_2 \dot{\theta}_2 \quad (A)$

***2- En exprimant la condition de roulement sans glissement au point J, point de tangence entre $\underline{S_2}$ et $\underline{S_3}$, trouver une relation entre $\dot{\theta}_3$ , $\dot{\theta}_2$ et $\dot{\theta}_4$ .***

$\vec{V}(J \in S_2/S_3) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}(J \in S_2/S_0) = \vec{V}(J \in S_3/S_0)$ (**)

Avec : $\vec{V}(J \in S_2/S_0) = \vec{V}(A \in S_2/S_0) + \vec{JA} \wedge \vec{\Omega}(S_2/S_0)$

$= (R_1 + R_2)\, \dot{\theta}_4 \vec{y}_1 - R_2 \vec{x}_4 \wedge \dot{\theta}_2 \vec{z}_0$

$= (R_1 + R_2)\, \dot{\theta}_4 + R_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}_4$

et $\vec{V}(J \in S_3/S_0) = \underbrace{\vec{V}(O \in S_3/S_0)}_{\vec{0}} + \vec{JO} \wedge \vec{\Omega}(S_3/S_0) = -R_3 \vec{x}_4 \wedge \dot{\theta}_3 \vec{z}_0$

$\vec{V}(J \in S3/S0) = R_3 \dot{\theta}_3 \vec{y}_4$

$(**)/\vec{y}_4 \Rightarrow (R_1 + R_2)\dot{\theta}_4 + R_2 \dot{\theta}_2 = R_3 \dot{\theta}_3$ (B)

3- *Quelle est la relation entre* $R_1$, $R_2$ *et* $R_3$ *?*

$R_3 = R_1 + 2R_2$ (C)

4- *Sachant que la nombre de dents de la roue i est donné par :* $Z_i = \cancel{2m}\, Z_i$. *Déduire le rapport* $\dfrac{\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4}{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_4}$ *en fonction de* $Z_1$ *et* $Z_3$ *(c'est la formule de Willis).*

$Z_i = \dfrac{2R_i}{m}$ (D)

(A) et (D) $\Rightarrow Z_1 \dot{\theta}_1 - (Z_1 + Z_2)\dot{\theta}_4 + Z_2 \dot{\theta}_2 = 0$ (I)

(B) et (D) $\Rightarrow (Z_1 + Z_2)\dot{\theta}_4 + Z_2 \dot{\theta}_2 - Z_3 \dot{\theta}_3 = 0$ (II)

(I) − (II) $\Rightarrow Z_1 \dot{\theta}_1 - (Z_1 + Z_2)\dot{\theta}_4 - (Z_1 + Z_2)\dot{\theta}_4 + Z_3 \dot{\theta}_3 = 0$ (III)

(C) $\Rightarrow Z_2 = \dfrac{Z_3 - Z_1}{2}$ ; on injecte ensuite dans (III)

$Z_1 \dot{\theta}_1 - \left(Z_1 + \dfrac{Z_3 - Z_1}{2}\right)\dot{\theta}_4 - \left(Z_1 + \dfrac{Z_3 - Z_1}{2}\right)\dot{\theta}_4 + Z_3 \dot{\theta}_3 = 0$

$Z_1 \dot{\theta}_1 - \left(\dfrac{Z_3 + Z_1}{2}\right)\dot{\theta}_4 - \left(\dfrac{Z_3 + Z_1}{2}\right)\dot{\theta}_4 + Z_3 \dot{\theta}_3 = 0$

$Z_1 \dot{\theta}_1 - (Z_3 + Z_1)\dot{\theta}_4 + Z_3 \dot{\theta}_3 = 0$

ou encore : $Z_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_4) + Z_3(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4) = 0$

Enfin : $\dfrac{\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4}{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_4} = -\dfrac{Z_1}{Z_3}$

## 5- Application :

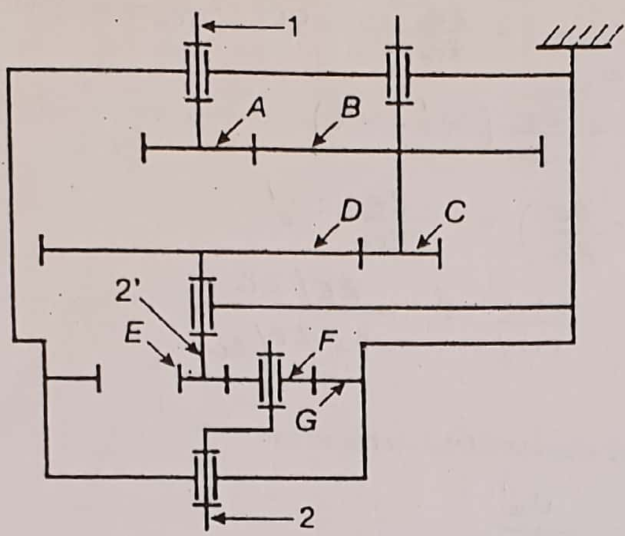
On considère le réducteur de **la figure 3** constitué de deux étages.

Premier étage : Train à axes fixes qui permet de transmettre le mouvement entre 1 et 2';

Deuxième train : Train épicycloïdal qui permet de transmettre le mouvement entre 2' et 2.

**Figure 3**

$Z_A = 20$ dents
$Z_B = 48$ dents
$Z_C = 16$ dents
$Z_D = 52$ dents
$Z_E = 14$ dents
$Z_F = 34$ dents
$Z_G = 82$ dents




**En fonction des nombres de dents fournis, et sans applications numériques, on demande de :**

1. ***Déterminer le rapport de réduction du premier étage :*** $\frac{\omega_{2'}}{\omega_1}$ ;

Train à axes fixes $\Rightarrow$ $\frac{\omega_2'}{\omega_1} = (-1)^n \frac{\prod Z menantes}{\prod Z menée}$

$n = 2$ (2 engrenages cylindriques ext. à axes // : (A-B) et (C-D))

Donc : $\frac{\omega_2'}{\omega_1} = \frac{Z_A \cdot Z_C}{Z_B \cdot Z_D}$

**2. Ecrire la formule de Willis pour le deuxième étage (2 est le porte satellite).**

(2') : planétaire ; F : satellite ; 2 : P.S et G : planétaire (fixe)

choisissons : 2' : entrée et G : sortie

Formule de Willis $\Rightarrow \dfrac{\omega_G - \omega_2}{\omega_{2'} - \omega_2} = (-1)^n \dfrac{\prod Z_{menantes}}{\prod Z_{menées}}$

n = 1 (1 seul eng. ext. (EF) (L'autre est int (FG)) $\Rightarrow \dfrac{\omega_G - \omega_2}{\omega_{2'} - \omega_2} = -\dfrac{Z_E \cdot \cancel{Z_F}}{\cancel{Z_F} \cdot Z_G} = -\dfrac{Z_E}{Z_G}$ (***)

**3. Déduire le rapport de réduction du deuxième étage : $\dfrac{\omega_2}{\omega_{2'}}$ ;**

(***) $\Rightarrow \dfrac{\omega_G - \omega_2}{\omega_{2'} - \omega_2} = -\dfrac{Z_E}{Z_G}$ or $\omega_G = 0$ (fixe)

$\Rightarrow -\omega_2 = -\dfrac{Z_E}{Z_G}(\omega_{2'} - \omega_2)$

$\Rightarrow \omega_2\left(-1 - \dfrac{Z_E}{Z_G}\right) = -\dfrac{Z_E}{Z_G}\omega_{2'}$

D'où : $\dfrac{\omega_2}{\omega_{2'}} = \dfrac{Z_E/Z_G}{1 + Z_E/Z_G}$

**4. Déduire alors le rapport de réduction total du réducteur : $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$**

$\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{\omega_2}{\omega_{2'}} \cdot \dfrac{\omega_{2'}}{\omega_1}$

$= \dfrac{Z_E/Z_G}{1 + Z_E/Z_G} \cdot \dfrac{Z_A \cdot Z_C}{Z_B \cdot Z_D} = \dfrac{Z_E \cdot Z_A Z_C}{(Z_G + Z_E) Z_B \cdot Z_D}$

**5. Faire l'application numérique, puis comparer les vitesses et les sens de rotation de 1 et 2.**

$\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{14 \times 20 \times 16}{(82 + 14) \times 48 \times 52} \simeq 0{,}0187$

- * 1 et 2 tournent ds le m̂ sens (Rapport positif).
- * 2 tourne moins vite que 1 (Rapp. < 1)

## EXERCICE 1

On considère un train épicycloïdal dont les schémas sont représentés sur la figure 1 ci-dessous. Ce mécanisme joue le rôle d'un réducteur de vitesse de rotation.
Il est composé de :

- Un bâti <u>$S_0$</u> fixe : repère lié $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
- Planétaire d'entrée <u>$S_1$</u> : en liaison pivot par rapport à <u>$S_0$</u> autour de $(O, \vec{z}_0)$.
  Repère lié $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$
- Satellite <u>$S_2$</u> : en liaison pivot par rapport à <u>$S_4$</u> autour de $(A, \vec{z}_0)$.
  Repère lié $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$
- Couronne <u>$S_3$</u> : planétaire de sortie, en liaison pivot par rapport à <u>$S_0$</u> autour de $(O, \vec{z}_0)$
  Repère lié $(0, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$
- Porte satellite <u>$S_4$</u> : en liaison pivot par rapport à <u>$S_0$</u> autour de $(O, \vec{z}_0)$
  Repère lié $(0, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$.

On désire établir la relation connue sous le nom de : « **relation de Willis** » et très utilisée dans la construction des réducteurs. Pour cela, il vous est demandé de répondre aux questions suivantes :

1- En exprimant la condition de roulement sans glissement au point **I**, point de tangence entre <u>$S_1$</u> et <u>$S_2$</u>, trouver une relation entre $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ et $\dot{\theta}_4$.

2- En exprimant la condition de roulement sans glissement au point J, point de tangence entre <u>$S_2$</u> et <u>$S_3$</u>, trouver une relation entre $\dot{\theta}_3$, $\dot{\theta}_2$ et $\dot{\theta}_4$.

3- Montrer alors que : $k\,\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3 + (1-k)\,\dot{\theta}_4 = 0$ avec : $k = -R_1/R_3$.

4- **<u>Application :</u>**
Déterminer le rapport de réduction du réducteur, représenté sur la figure 2, défini par :
$n = \omega_2/\omega_1$ en fonction des nombres de dents $Z_i$.

## EXERCICE 2 :

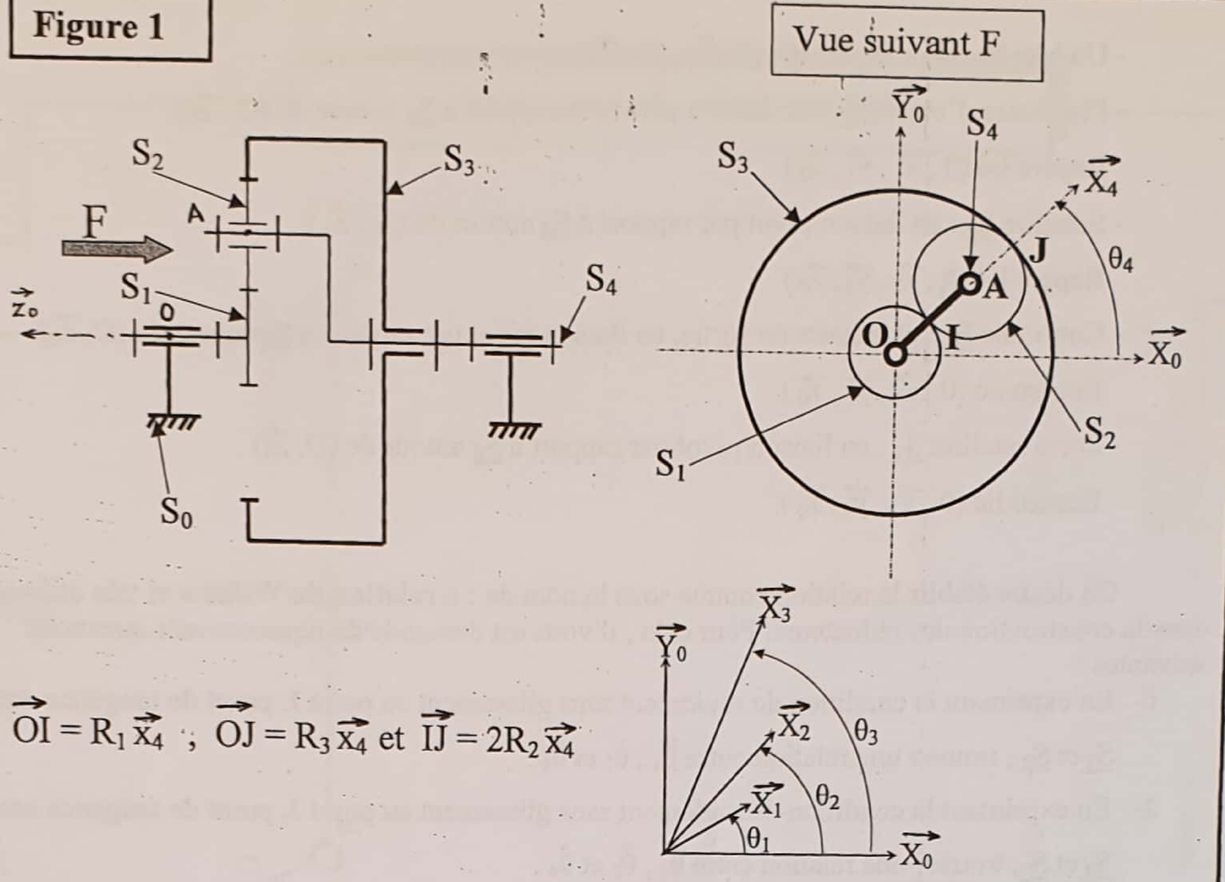
L'étude proposée porte sur un mécanisme de pompe dont le schéma est donné sur le document-réponses.
On demande de déterminer, **<u>graphiquement</u>**, $\vec{V}_{(D\in 4/0)}$, sachant que :
$OA = 25$ mm et $\dot{\alpha} = 20$ rad/s.

<u>Echelle des vitesses</u> : 1mm $\rightarrow$ 10 mm/s.

*<u>Les tracés sont à effectuer sur le document-réponse et les commentaires, de préférence brefs, sur la copie.</u>*

**<u>Indication</u>** : Déterminer $\vec{V}_{(A\in 1/0)}$ ensuite $\vec{V}_{(B\in 2/0)}$.

**Figure 1**

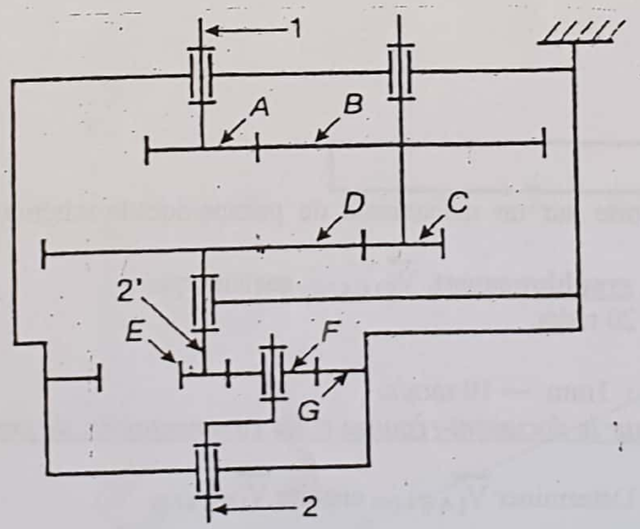



$\overrightarrow{OI} = R_1\,\vec{x}_4$ ; $\overrightarrow{OJ} = R_3\,\vec{x}_4$ et $\overrightarrow{IJ} = 2R_2\,\vec{x}_4$

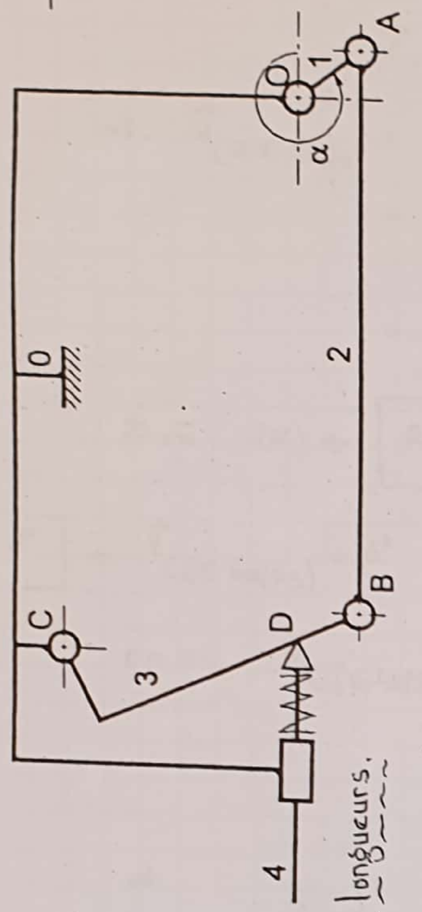
**Figure 2**

$Z_A = 20$ dents
$Z_B = 48$ dents
$Z_C = 16$ dents

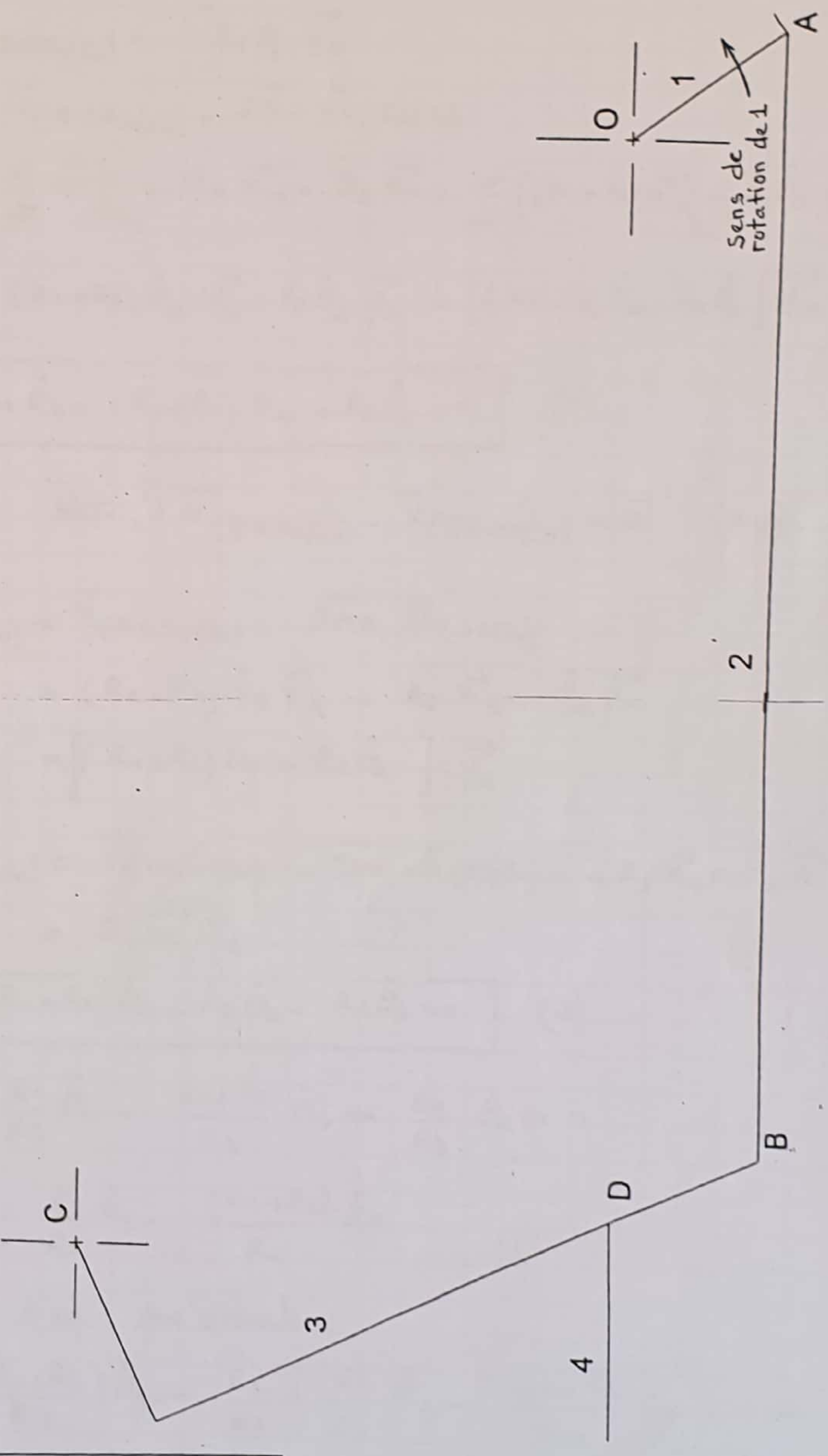
$Z_D = 52$ dents
$Z_E = 14$ dents
$Z_F = 34$ dents
$Z_G = 82$ dents



# Document- réponses




Ce schéma est tracé à l'échelle des longueurs.




NOM : ……………………………………………

CORRIGE DU DEVOIR DE MAISON — MPSI 3

EXERCICE 1

1°] $\vec{V}(I\in S_1/S_2)=\vec{0}$ donc : $\vec{V}(I\in S_1/S_0)-\vec{V}(I\in S_2/S_0)=\vec{0}$ (*)

on a : $\vec{V}(I\in S_1/S_0)=\underbrace{\vec{V}(O\in S_1/S_0)}_{\vec{0}}+\vec{IO}\wedge\vec{\Omega}(S_1/S_0)=-R_1\vec{x}_4\wedge\dot{\theta}_1\vec{z}_0$

$$\vec{V}(I\in S_1/S_0)=R_1\dot{\theta}_1\vec{y}_4$$

et : $\vec{V}(I\in S_2/S_0)=\vec{V}(A\in S_2/S_0)+\vec{IA}\wedge\vec{\Omega}(S_2/S_0)$

$$=\frac{d}{dt}\vec{OA}\Big]_{R_0}+R_2\vec{x}_4\wedge\dot{\theta}_2\vec{z}_0=\frac{d}{dt}\left((R_1+R_2)\vec{x}_4\right)\Big]_{R_0}-R_2\dot{\theta}_2\vec{y}_4$$

$$=(R_1+R_2)\dot{\theta}_4\vec{y}_4-R_2\dot{\theta}_2\vec{y}_4=\left[(R_1+R_2)\dot{\theta}_4-R_2\dot{\theta}_2\right]\vec{y}_4$$

D'où : (*) $\Rightarrow$ $\boxed{R_1\dot{\theta}_1-(R_1+R_2)\dot{\theta}_4+R_2\dot{\theta}_2=0}$ (1)

2°] $\vec{V}(J\in S_2/S_3)=\vec{0}$ soit : $\vec{V}(J\in S_2/S_0)-\vec{V}(J\in S_3/S_0)=\vec{0}$ (**)

on a : $\vec{V}(J\in S_2/S_0)=\vec{V}(A\in S_2/S_0)+\vec{JA}\wedge\vec{\Omega}(S_2/S_0)$

$$=(R_1+R_2)\dot{\theta}_4\vec{y}_4-R_2\vec{x}_4\wedge\dot{\theta}_2\vec{z}_0$$

$$=\left[(R_1+R_2)\dot{\theta}_4+R_2\dot{\theta}_2\right]\vec{y}_4$$

et

$\vec{V}(J\in S_3/S_0)=\underbrace{\vec{V}(O\in S_3/S_0)}_{\vec{0}}+\vec{JO}\wedge\vec{\Omega}(S_3/S_0)=-R_3\vec{x}_4\wedge\dot{\theta}_3\vec{z}_0$

$$=R_3\dot{\theta}_3\vec{y}_4$$

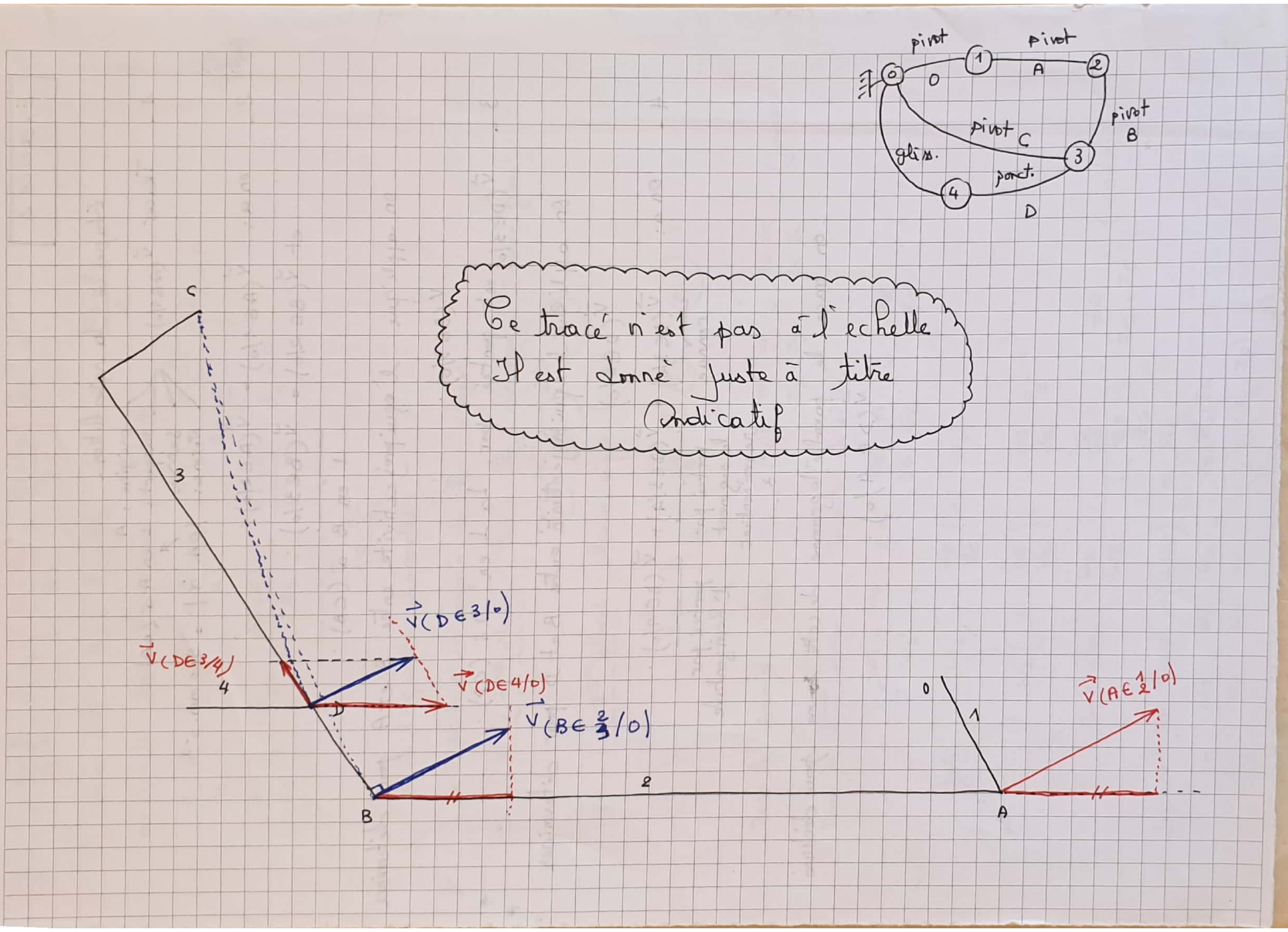
D'où : (**) $\Rightarrow$ $\boxed{(R_1+R_2)\dot{\theta}_4+R_2\dot{\theta}_2-R_3\dot{\theta}_3=0}$ (2)

3°] (1) $\times\left(-\frac{1}{R_3}\right)$ $\Rightarrow$ $-\frac{R_1}{R_3}\dot{\theta}_1+\frac{R_1+R_2}{R_3}\dot{\theta}_4-\frac{R_2}{R_3}\dot{\theta}_2=0$

(2) $\Rightarrow$ $\dot{\theta}_2=\frac{R_3}{R_2}\dot{\theta}_3-\frac{(R_1+R_2)}{R_2}\dot{\theta}_4$

on injecte dans l'éq. précédente :

$$-\frac{R_1}{R_3}\dot{\theta}_1+\left(\frac{R_1+R_2}{R_3}\right)\dot{\theta}_4-\frac{R_2}{R_3}\left(\frac{R_3}{R_2}\dot{\theta}_3-\frac{R_1+R_2}{R_2}\dot{\theta}_4\right)=0$$


pivot
pivot
0
1
A
2
pivot
B
pivot C
3
glis.
ponct.
4
D
Ce tracé n'est pas à l'echelle
Il est donné juste à titre
indicatif
C
3
$\vec{V}(D \in 3/0)$
$\vec{V}(D \in 3/4)$
4
$\vec{V}(D \in 4/0)$
D
$\vec{V}(B \in \frac{2}{3}/0)$
B
2
0
1
$\vec{V}(A \in \frac{1}{2}/0)$
A